

TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL

Matemaatika-loodusteaduskond

Füüsikainstituut

**LIE ALGEBRAD, KIHTKONNAD JA NENDE
TÄHTSUS**

KALIBRATSIOONIVÄLJATEOORiates

Bakalaureusetöö

Alari Varmann

Juhendaja: Rein-Karl Loide, Teoreetilise füüsika õppetool,
professor, Tallinna Tehnikaülikool

Kaasjuhendaja: Viktor Abramov, Geomeetria ja topoloogia õppetool,
professor, Tartu Ülikool

Tehniline füüsika

2012

Autorideklaratsioon

Deklareerin, et käesolev lõputöö on minu iseseisva töö tulemus ning kinnitan, et esitatud materjalide põhjal ei ole varem akadeemilist kraadi taotletud. Kinnitan, et antud töö koostamisel olen kõikide teiste autorite seisukohtadele, probleemipüstitustele, kogutud arvandmetele jmt viidanud.

Alari Varmann

(allkiri ja kuupäev)

Juhendaja:

Töö vastab bakalaureusetööle esitatavatele nõuetele.

(allkiri ja kuupäev)

Kaitsmiskomisjoni esimees:

Lubatud kaitsmisele

.....(nimi, allkiri, kuupäev)

Sisukord

Kasutatud tähised ja lühendid	6
SISSEJUHATUS	7
1 SISSEJUHATUS KALIBRATSIOONITEOORIATESSE	9
1.1 Abeli kalibratsiooniteooriad	9
1.1.1 Sissejuhatus	9
1.1.2 Väljade lagranžiaanid	10
1.1.3 Diraci lagranžiaani kalibratsiooniteisendused	11
1.1.4 Kalibratsiooniinvariantseid lagranžiaanid. Kvantelektrodünaamika lagranžiaan	13
1.2 Mitte-Abeli kalibratsiooniteooriad	14
2 KIHTKONNAD. SEOSTUSE MÕISTE	16
2.1 Kihtkondade näited	16
2.2 Peakihtkonnad	18
2.3 Seostus kui kovariantne diferentsiaal	20
2.4 Vektorkihtkonnad	21
3 YANG-MILLSI TEOORIA. SELLE SEOS KAASAEGSE DIFERENT- SIAALGEOMEETRIAGA	23
3.1 Miks on Yang-Millsi teooriad olnud nii edukad?	23
3.2 Kalibratsiooniteooriate liigitus sümmeetriarühma järgi	24
3.2.1 $U(1)$ kalibratsiooniteooria	25
3.2.2 Yang-Millsi kalibratsiooniteooria	25
3.3 Yang-Millsi väljavõrrandid	26
3.4 Yang-Millsi võrrandite geomeetrilise tausta eeltöö	26
3.4.1 Muutkond	26
3.4.2 Seostus D	26

3.4.3	Seostuse kõverus F	27
3.4.4	Kovariantne välisdiferentsiaal d_D kihtkondadel	28
3.5	Yang-Millsi 1. võrrandi geomeetiline sisu	31
3.6	Yang-Millsi 2. võrrandi geomeetiline sisu	31
3.6.1	Hodge'i täheoperaator ja duaalne vooluvektor J	31
3.7	Alternatiivne lähenemine Yang-Millsi teooriale. Arvutused dife- rentsiaalvormide esituses	32
3.7.1	Vertikaalvektorväli peakihtkonnal	32
3.7.2	Seostus kihtkonnal. Mõisted.	34
3.7.3	Seostuse 1-vorm	35
	Kokkuvõte	45
	Summary (resümee)	48
	Tänuavaldused	49
	Kasutatud kirjanduse loetelu	50
	LISAD	52
	Lisa 1 Kalibratsiooniteisendused	52
	Lisa 2 Vektorväljad ja nende seos Lie operatsioonidega	53
	Integraalkõverate voog ja Lie diferentseerimine.	53
	Difeomorfismide üheparameetiline rühm	53
	Lisa 3 Lie rühmad ja Lie algebrad	54
	Lie rühmad	54
	3.7.4 Lie rühma toime muutkondadel	55
	Lie algebrad	58
	3.7.5 Üheparameetiline alamrühm	61
	3.7.6 Lie algebra baas	64
	3.7.7 Struktuurikonstandid ja Lie algebrate näiteid	65
	Diferentsiaalvormid	67
	Lisa 3 Kihtkonnad	69
	Definitsioonid ja mõisted	69
	Kihtkonna struktuur	69
	Üleminekufunktsioonid	70
	Kihtkonna osade lahtimõtestamine	70
	Lisa 4 Maxwelli võrrandid	71

Lisa 5 Faraday tensori seos Lorenzi kalibratsiooniga	75
--	----

Kasutatud tähised ja lühendid

Töös on kasutusel nn täiendatud Heaviside-Lorentz süsteem, kus

$$\varepsilon_0 = \mu_0 = c = \hbar = 1$$

$\mathbb{R}_+^n$	n -mõõtmeline aritmeetiline vektor-poolruum
$x^\mu = (t, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$	kontravariantsed koordinaadid
x_μ	kovariantsed koordinaadid
$\eta = (g^{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$	Minkowski meetriline tensor
$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$	Faraday tensor, elektromagnetvälja tensor
$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$	4 – potentsiaal
$\mathcal{F}(\mathcal{M})$	muutkonnal M määratud funktsioonide hulk
$T_p M$	Puutujaruum muutkonna punktis p
$\mathcal{X}(M)$	kõigi vektorväljade hulk muutkonnal M
$\mathcal{L}$	lagranžiaani tihedus (töös lagranžiaan)
$\Omega^r(M)$	siledade r -vormide ruum muutkonnal M
$J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$	voolutiheduse 4-vektor
J	duaalne vooluvektor
$\mathbb{F}$	korpus
$\Gamma(M, F)$	kõigi lõigete hulk muutkonnal M
M	m – mõõtmeline diferentseeruv muutkond
N	n – mõõtmeline diferentseeruv muutkond
e	(Lie) rühma ühikelement
p.p.	parem pool, parempoolne
v.p.	vasak pool, vasakpoolne

SISSEJUHATUS

Kihtkonnad on kaasaegse kalibratsiooniväljateooria aparatuur. Viimased formuleeritakse enamasti kihtkondade kaudu. Seletamaks orienteeritud aine, nt kristalli, defekte, muutusid 1970ndatel kihtkonnad populaarseks kondenseeritud aine füüsikas. Kihtkondade teoorial leidub rakendusi alates ülivoolava Heelium-3 omadustest kuni terasesortide tugevuse seletamise ja üldrelatiivsusteooriani. Vajadus kihtkondi kasutada on motiveeritud sellest, et tavalist diferentsiaalarvutust muutkondade korral rakendada ei saa, kuna vektorid erinevates vektorruumides ei ole otseselt võrreldavad. Erinevate vektorruumide vektoreid liites võib saada vektori, mis ei kuulu mittekuumbagi vektorruumi. Selleks tuuaksegi sisse kihtkonna mõiste, mis üldistab kõikide muutkonna punktide vektorruumid terviklikuks kindlate omadustega matemaatiliseks struktuuriks.

Lie algebrad ja Lie rühmi kasutatakse tänapäeva teoreetilises füüsikas väga ulatuslikult, eriti aga osakestefüüsikas. Põhjus on selles, et Lie rühmad on osakestefüüsika standardmudeli sümmeetriarühmad (teisenduste rühmad). On ka tähelepanuväärne, et eksootilised Lie rühmad leiavad laialdast kasutust stringiteoorias.

Käesoleva bakalaureusetöö põhieesmärgiks on demonstreerida, et Yang-Millsi klassikaline (kvantiseerimata) väljateooria on kaasaegse diferentsiaalgeomeetriaga tihedalt läbipõimunud. Loodetavasti antakse käesoleva tööga teatav ettekujutus Yang-Millsi teooria matemaatilisest formalismist. Üldisemas perspektiivis antakse lühiülevaade tänapäeva osakestefüüsikas kasutatavast matemaatilisest formalismist ja kalibratsiooniteooriate põhiideedest. Eksponeeritakse mitmeid pikemaid arvutusi, sest töö autori arvates on need teooria tegeliku tunnetamise huvides hädavajalikud.

Töö teised eesmärgid:

- (i) Tuua näiteid Lie rühmade, Lie algebrate ja kihtkondade tähtsusest füüsikas, peaaesjalikult kalibratsiooniväljateooriates. Illustreerivateks näideteks on muu hulgas Lorentzi teisenduste rühma ja elektronõrka vastasmõju kirjeldava teooria näide.
- (ii) Teha sissejuhatust kalibratsiooniteooriate klassikalistest aspektidest, tuues näiteid (väljade lagranžiaani leidmine, kalibratsiooniinvariantse lagranžiaani

ni mõiste, kvantelektrodünaamika lagranžiaan).

- (iii) Rakendada Yang-Millsi teooriat elektromagnetilise vastasmõju erijuhul (Maxwelli võrrandid.)

Töö on jagatud kolmeks peatükiks:

- (i) Esimeses peatükis antakse põgus ülevaade kalibratsiooniteooriate üldistest väljateoreetilistest aspektidest, lähtepunktiga Lagrange'i formalismis ja kvantmehaanikas.
- (ii) Teises peatükis tutvustatakse kihtkondade teooriat. Eraldi uuritakse peakihtkondi ja vektorkihtkondi, mida hiljem kombineerides opereeritakse vektorpeakihtkondadega. Tuuakse sisse seostuse mõiste.
- (iii) Kolmandas peatükis käsitletakse Yang-Millsi klassikalist väljateooriat. Antakse Yang-Millsi väljavõrrandite geomeetriline sisu. Ühtlasi rakendatakse töös arendatud matemaatilist aparatuuri, et seostada geomeetria, algebra ja füüsika.

Lisaks sellele on töös ka mõned lisad, millest leiab täiendavat materjali töö paremaks mõistmiseks, eriti kihtkondade põhimõisteid lisast nr 3.

Lõputöö jaoks materjalide otsimisele ei ole väga palju aega pühendatud, sest vastavasisulise kirjanduse leidmine on võrdlemisi lihtne. Põhiliselt toetutakse töös raamatutele [10] ja [11]. Lõputöö jaoks kirjanduse valimise protsessi käigus olen ennast matemaatiliselt täiendanud muu hulgas ka kahe raamatu abiga, millele töös otseselt ei viidanud, kuid mis on üldisele arusaamisele olulisel määral juurde andnud. Need raamatud on Ülo Lumiste „Diferentsiaalgeomeetria” ja Martin Lipschultz'i „Schaum's Differential Geometry”.

1 SISSEJUHATUS KALIBRATSIOONITEOORIATESSE

1.1 Abeli kalibratsiooniteooriad

1.1.1 Sissejuhatus

Käesoleva peatüki eesmärgiks on anda põgus ülevaade kalibratsiooniteooriate üldistest väljateoreetilistest aspektidest.

Kalibratsiooniteooria on väljateooria, kus lagranžiaan on invariantne pideva rühma lokaalsete teisenduste suhtes. Mõiste kalibratsioon viitab üleliigsetele vabadusastmetele lagranžiaanis. Erinevate kalibratsioonide vahel saab teha teisendusi - kalibratsiooniteisendusi - ja need teisendused moodustavad Lie rühma, mis on teooria sümmeetriarühmaks (kalibratsioonirühmaks). Kalibratsiooniteooriad on elementaarosakeste standardmudel põhiline matemaatiline aparatuur. Selle abil kirjeldatakse elementaarosakeste dünaamikat. [2] Elementaarosakestefüüsika standardmudel on mitte-Abeli kalibratsiooniteooria, kus sümmeetriarühmaks on $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ ja tal on kokku 12 kalibratsioonibosonit: footon, kolm vahebosonit ja kaheksa gluonit. Paljud võimsad teooriad saab kirjeldada lagranžiaaniga, mis on invariantne mingi sümmeetria (teisenduste) rühma suhtes. Kui lagranžiaan on invariantne teisenduse suhtes, mis tehakse identselt igas ruumipunktis, siis süsteemil on globaalne sümmeetria. Tänapäeval baseeruvad kõik füüsikaliselt ja matemaatiliselt korrektsed fundamentaalseid vastasmõjusid kirjeldavad teooriad kalibratsiooniteooriatel. Kalibratsiooniprintsiibi idee on selles, et füüsika ei tohi sõltuda selle kirjeldamise viisist. Mitterelativistlik kvantmehaanika lubab laine-funktsiooniga teha globaalseid faasiteisendusi (ehk globaalset faasivalikut) kogu ruumis, kuid relatiivsusteooria, tänu piirkiiruse olemasolule looduses, seda teha ei luba. Faasi valik ühes ruumipiirkonnas saab teistele teatavaks alles teatava aja möödudes ning seetõttu on mõistlik lugeda, et faasi saab valida ainult lokaalselt

ning selline valikuõigus on kõikidel vaatlejatel ühesugune. Lokaalsed faasiteisendused on võetud tänapäeva osakestefüüsika alusprintsipiiks. Selleks, et tagada teooria invariantsus lokaalsete faasiteisenduste suhtes (füüsika sõltumatus faasi valikust), tuleb sisse tuua täiendavad, osakestevahelisi vastastikmõjusid kirjeldavad kalibratsioonväljad.

Kui kvantelektrodünaamikas oli kalibratsiooninvariantsus järeldus juba olemaolevast teoriast, siis esimesena võtsid selle teooria loomisel aluseks Yang ja Mills.

Esimeseks tänapäeva mõistes kalibratsiooniteooriaks oli kvantelektrodünaamika (QED). Selle loojateks olid W. Heisenberg, W. Pauli ja P. Dirac ja Hermann Weyl, teooria renormeeritavuse tõestasid Richard Feynman, Sin-Itiro Tomonaga ja Julian Schwinger, kes said selle eest ka 1959. aastal füüsika Nobeli preemia.

1950ndatel jätkasid Yang, Mills ja Ryoyu Utiyama füüsikaliste teooriate sümmeetriaseaduspärasuste kindlakstegemist. Tee oli nende ette tehtud Weyli ja Pauli poolt. Teiste teooriate hulgas klassifitseeriti kvantelektrodünaamika Abeli kalibratsiooniteooriana. Viimase struktuurirühmaks on $U(1)$ ja tal on üks massita kalibratsiooniväli. Vastasmõju vahendajaks on footon, mis on teooria kalibratsiooniboson. Kui teooria kvantiseerida, siis muutub footon kalibratsioonivälja kvandiks. Seepärast on kalibratsioonibosoneid sama palju kui on välja generaatoreid. Kvantelektrodünaamikas on ainult 1 generaator. Tuletagem meelde, et kalibratsioonibosoneid kirjeldavad väljad on määratud mitteüheselt — kalibratsiooniteisenduste täpsuseni. Kuna massiga liige pole võrrandites kalibratsiooninvariantne, siis kirjeldavad kalibratsioonibosoneid massita osakeste väljavõrrandid. Heaks näiteks on kvantkromodünaamika, kus on gluuonid massita, aga nendevahelise vastastikmõju tõttu ja nn kvarkvangistuse tõttu on tugevate „jõudude” mõjuraadius väike. Nõrga vastastikmõju korral on vaja aga spetsiaalselt Higgsi mehhanismi, et tekitada vahebosonitele massi.

1.1.2 Väljade lagranžiaanid

Selles jaotises antakse mõned töös vajalike füüsikaliste väljade lagranžiaanid:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m_B^2}{8\pi} A^\nu A_\nu \quad \text{Vaba Proca lagranžiaan, (bosoni) spinn 1} \\
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta \quad \text{Vaba välja lagranžiaan} \\
\mathcal{L} &= i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi \quad \text{Vaba Diraci välja lagranžiaan, spinn 1/2} \\
\mathcal{L} &= -J^\mu A_\mu = -\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad \text{Diraci välja ja EM-välja vaheline vastasmõju} \\
\mathcal{L}_{EM} &= -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \quad \text{Maxwelli lagranžiaan}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

kus m on (elektroni) mass, m_B bosoni mass, J^μ 4-voolutihedus, γ^μ Diraci maatriksid, A^ν 4-potentsiaal ja Proca¹ lagranžiaan kirjeldab spinniga 1 massiga osakesi Minkowski aegruumis.

1.1.3 Diraci lagranžiaani kalibratsiooniteisendused

Käesolevas jaotises vaadeldakse $U(1)$ -kalibratsiooniteisendusi, kus $U(1)$ on elektromagnetilise vastasmõju (Abeli) struktuurirühm.

Lisa joonisel (3.4) on toodud ära kalibratsiooniteisenduste üldine kuju. Praegusel juhul on sümmeetriarühmaks $U(1)$.

Olgu antud lainefunktsioon ψ ja Diraci lagranžiaani seosega (1.1) alternatiivne kuju:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi. \tag{1.2}$$

Globaalsel kalibratsiooniteisendusel teiseneb lainefunktsioon järgmiselt:

$$\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi} e^{i\lambda(x)}, \psi \longrightarrow \psi e^{-i\lambda(x)} \tag{1.3}$$

Lihtne on kontrollida Diraci välja lagranžiaani invariantisust selle teisenduse suhtes. Kontrollime, kas kehtib ka lokaalne kalibratsiooniinvariantisus. Sel juhul sõltub

¹Alexandru Proca (1897-1955) — Rumeenia füüsik

faas asukohast aegruumis. Tehes lainefunktsiooniga $U(1)$ -teisendused (1.3), teise-
neb ka lagranžiaan citeNakahara (1.2), täpsemalt

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}^* = \mathcal{L} + (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda. \quad (1.4)$$

Avaldisest (1.4) on selge, et **vaba** Diraci lagranžiaan ei ole lokaalselt kalib. inva-
riantne, sest tuletist võttes tekib lisaliige. Kuidas viimasest vabaneda? Nõuame,
et **summaarne lagranžiaan** oleks lokaalse kalib. teisenduse suhtes invariantne.
Selleks lisame Diraci vabale lagranžiaanile liikme, mis kirjeldab vektorvälja A_μ
(**kalibratsioonivälja**) ja Diraci välja vahelist vastasmõju. Saame [10]:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (1.5)$$

A_μ on kalibratsiooniväli, mille lokaalne kalibratsiooniteisendus on antud kujul

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu\lambda, \text{ kusjuures } \partial_\mu(e^{-i\lambda(x)}\psi) = e^{-i\lambda}[\partial_\mu - i\partial_\mu\lambda]\psi \quad (1.6)$$

Näitame, et lagranžiaan (1.5) on invariantne lokaalsete kalib. teisenduste suh-
tes. Selleks tuleb Diraci vabas lagranžiaanis (1.2) asendada tavapärase diferent-
siaaloperaator **kovariantse diferentsiaaliga** $\nabla_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$.

Siis avaldub lagranžiaan (1.2) kujul:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (1.7)$$

Jätame teise liikme vaatluse alt välja, sest see probleeme ei valmista. Kasuta-
des eelpool arvutatud avaldist (1.6) uurime, kuidas teiseneb lagranžiaani (1.7)
lokaalse kalib. invariantsuse aspektist problemaatiline liige kovariantse diferent-
siaali abil [6]:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu\psi &= (\partial_\mu + iA_\mu)\psi \rightarrow \underbrace{[\partial_\mu + i(A_\mu + \partial_\mu\lambda)]}_{\nabla'_\mu}(e^{-i\lambda(x)}\psi) \\ &= \underbrace{[\partial_\mu - i\partial_\mu\lambda]}_{\text{avaldisest (1.6)}} + iA_\mu + i\partial_\mu\lambda e^{-i\lambda(x)}\psi = e^{-i\lambda(x)}\nabla_\mu\psi \end{aligned} \quad (1.8)$$

Selgub, et kovariantse diferentsiaali abiga saime lisaliikmest $i\partial_\mu\lambda$ lahti, mistõttu

on ilmne, et lagranžiaan (1.5) on tõepoolest invariantne lokaalse kalibratsiooni-teisenduse suhtes:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi \rightarrow ie^{i\lambda(x)}e^{-i\lambda(x)}\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi = \mathcal{L} \quad (1.9)$$

[6] Tehtud trikiga saime muuta globaalselt invariantse lagranžiaani ka lokaalselt invariantseks. Seega sümmeetria jääb kehtima. Pangem aga tähele, et kovariantse diferentsiaaliga koos toodi sisse ka vektorväli A_μ , mis peab kvantväljateooria reeglite järgi andma summaarsesse lagranžiaani täiendava 'vaba' liikme. Viimase saame Proca lagranžiaanist avaldisest (1.1), kusjuures on selge, et $A^\nu A_\nu$ liikme tõttu ei oleks see teisenduse (1.6) suhtes invariantne, kuigi lisast nr 5 on teada, et liige $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ on. Kui valida aga avaldises (1.1) $m = 0$, siis ebasümmeetrilist liiget ei tekiks. Sellise matemaatilise põhjuse pärast ongi kalibratsiooniväli A_μ massita. Oleme saanud kalibratsiooniinvariantse lagranžiaani.

1.1.4 Kalibratsiooniinvariantse lagranžiaanid.

Kvantelektrodünaamika lagranžiaan

Asendades vaba välja lagranžiaani (vt seos (1.1)) võrrandis (3.102) arvutata-tuga, st tehes asenduse $\frac{1}{2}\partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta \rightarrow \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$, saadakse kalibratsiooniinva-riantne lagranžiaan:

$$\mathcal{L} = \overbrace{i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi}^{\text{Dirac}} - \overbrace{J^\mu A_\mu}^{\text{vastasmõju}} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \text{ehk}$$

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \quad (1.10)$$

Esimese kahe liikme kalib. invariantse näitasime avaldises (1.9), viimase liikme invariantsus järeldub aga lemma (3.1) järeldusest.

Antud lagranžiaani nim ***kvantelektrodünaamika lagranžiaaniks***. [6]

1.2 Mitte-Abeli kalibratsiooniteooriad

Juba Heisenberg leidis, et kuna tuumajõud prootoni ja neutroni, samuti kahe prootoni ja kahe neutroni vahel on ühesugused, võib neid tuumajõudude suhtes (elektrilised jõud välja jättes) vaadata ühe osakese nukeloni kahe erineva olekuna. Seda saab kirjeldada sama moodi kui elektroni olekuid spinni ruumis. Sellest tuleneb mõiste **isospinni formalism**. Siiani tegeleti $U(1)$ kalibratsiooniteisendusega. Aastal 1954 töid Chen Ning Yang ja Robert Mills sisse mitte-Abeli kalibratsiooniteisendused. Algselt olid need mõeldud kirjeldama tugevat vastasmõju. **Yang-Millsi teoorias** vaadeldi lokaalseid faasiteisendusi sellises kahedimensioonaauses isospinni ruumis, kus lokaalne teisendus segab prooton- ja neutroniolekuid. Paulile ei meeldinud aga see, et Yang-Millsi välja kvant pidi kalibratsiooniinvariantuse säilitamiseks olema massita. Viimane fakt saigi määravaks. 1960ndatel, kui väljakvandile omistati sümmeetriarikkumise teel mass, sai Yang-Millsi teooriale osaks märkimisväärne edu. Pärast seda on Yang-Millsi teooria osutund füüsikaliselt korrektseks teooriaks, formuleerides edukalt kvantkromodünaamika (struktuurirühm $SU(3)$) põhitõed ja ühendades elektronõrga vastasmõju (struktuurirühm $U(1) \times SU(2)$). Tänapäeval on Yang-Millsi teooria elementaarosakeste füüsika alustalaks.

Käesolevas peatükis käsitleme Yang-Millsi kalibratsioonivälja $\mathcal{A}_\mu$, mis omandab väärtusi Lie algebrast $\mathfrak{su}(n)$. Viimase antihermiitilised moodustajad $\{T_\alpha\}$ rahuldagu järgmisi kommutatsiooniseoseid [6]:

$$[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma, \quad (1.11)$$

kus arvud $f_{\alpha\beta}{}^\gamma$ on G struktuurikonstandid. Lie rühma G elemendi U saab ühiku ümbruses avaldada: $U = \exp(-\theta^\alpha T_\alpha)$. Oletame, et $U \in G$ toime mõjul teiseneb Diraci väli $\psi \longrightarrow U\psi$, $\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}U^\dagger$. Vaatleme lagranžiaani [6]

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\gamma^\mu \underbrace{(\partial_\mu + g\mathcal{A}_\mu)}_{\nabla_\mu} - m] \psi, \quad (1.12)$$

kus g on vastasmõju koefitsent, mis iseloomustab kalibratsioonivälja ja Diraci välja vastasmõju tugevust. $\mathcal{A}_\mu$ omandab väärtusi rühma G Lie algebrast. Kehtib

seos $\mathcal{A}_\mu = A_\mu^\alpha T_\alpha$. Näitame, et $\mathcal{L}$ on invariantne järgmise teisenduse suhtes [10]:

$$\psi \longrightarrow \psi' = U\psi, \quad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}U^\dagger, \quad \mathcal{A}_\mu \longrightarrow \mathcal{A}'_\mu = UA_\mu U^\dagger + g^{-1}U\partial_\mu U^\dagger$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* &= \bar{\psi}U^\dagger\gamma^\mu\partial_\mu U\psi + i\bar{\psi}U^\dagger\gamma^\mu g(UA_\mu U^\dagger + g^{-1}U\partial_\mu U^\dagger)\psi + m\bar{\psi}\psi = \\ &= i\bar{\psi}U^\dagger\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\bar{\psi}U^\dagger\gamma^\mu U\partial_\mu\psi + i\bar{\psi}U^\dagger\gamma^\mu gA_\mu\psi U + i\bar{\psi}U^\dagger\gamma^\mu U\partial_\mu U^\dagger\psi = \\ &= \mathcal{L} + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi U + i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu U^\dagger = \mathcal{L} \end{aligned} \quad \square$$

Viimases kasutasime fakti, et kui $\theta^\alpha \in \mathbb{R}$, siis $\partial_\mu U = -\partial_\mu U^\dagger$. Defineerime Lie algebra väärtustega Yang-Millsi väljatensori $\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu]$. [10] Vörrelge valemiga (3.34). On ilmne, et tegelikult rakendatakse viimases valemis seost (3.34). Osutub, et mitte-Abeli kalibratsioonteisenduste eripära on selles, et seosekonstandi olemasolu tõttu (vt eelnevat võrrandit) on

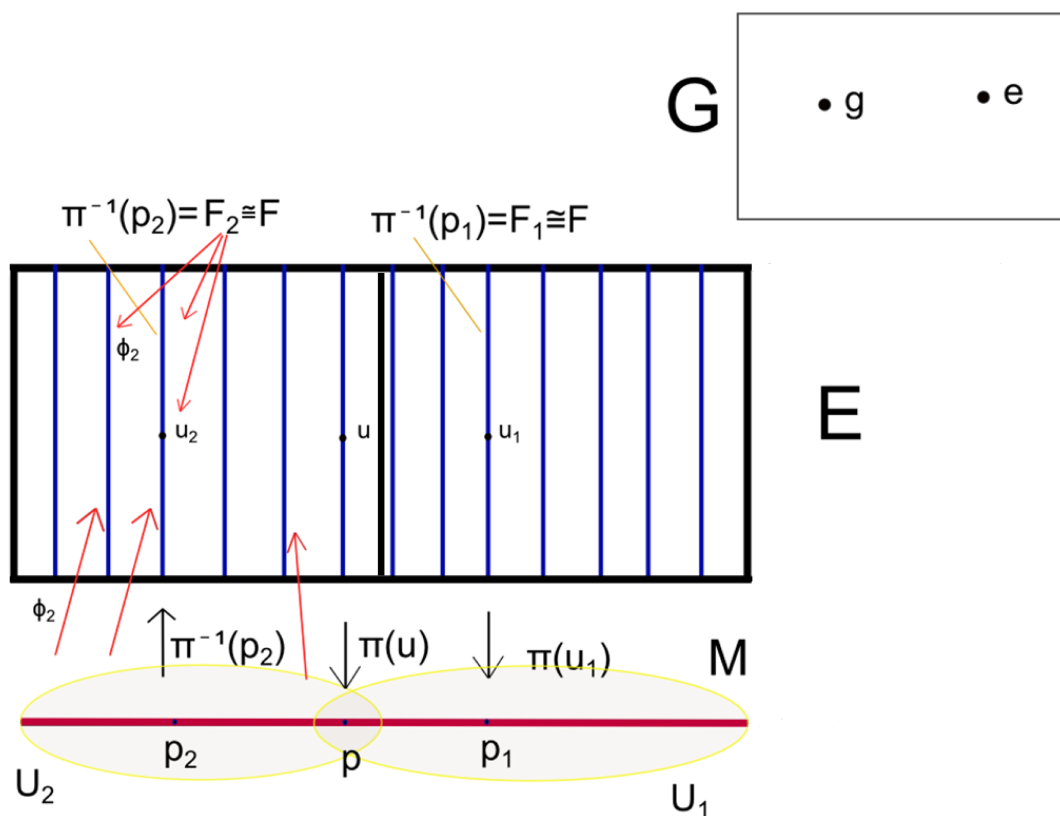
Yang-Millsi kalibratsiooniväljad alati ka omavahel seotud.

[10] Tänapäeva kalibratsioonteooriad saab esitada kaasaegse diferentsiaalgeomeetria formalismis. Et Yang-Millsi väljavõrrandeid geomeetriliselt tõlgendada, tehakse järgmises peatüki koostöös lisaga 3 väike sissejuhatus kihtkondade teooriasse.

2 KIHTKONNAD. SEOSTUSE MÕISTE

2.1 Kihtkondade näited

Kihtkondade temaatikast lühiülevaate saamiseks vaadake lisa nr 3. Järgnevalt lisatakse antud teooriale illustratsioone ja näited.



Joonis 2.1: Kihtkonna struktuur ja nendevahelised seosed [10]. Punaste nooltega on joonisel kujutatud lokaalne trivialisatsioon $\phi_2 : U_2 \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_2)$, mis on joonisel kujutatud pealekujutusena vasakpoolsele mustade joontega eraldatud riskülikule..

Eelneva joonise kohta olgu ka mainitud, et lokaalset trivialisatsiooni ϕ_1 pole joonisele märgitud, kuid see on kindlasti olemas. Tähiste tähendusi vaadata lisast nr 10.

Näide 2.1.1 Möbiuse leht Olgu $E \xrightarrow{\pi} S^1$ kihtkond kihiruumiga $F = (-1, 1)$. Olgu $U_1 \cup U_2$ baasmuutkonna S^1 lahtine kate. Samastame reaalarvud ringjoone S^1 elementidega, seades igale reaalarvule x vastavusse tema polaarnurga x .

$$U_1 = (0, 2\pi) \qquad U_2 = (-\pi, \pi).$$

On selge, et U_1 ei kata tervet ringjoont, sest 0-punkt on katmata, selle katab U_2 . Olgu ühisosa (vt järgnevat joonist) $U_1 \cap U_2 = A \cup B$, kus

$$A = (0, \pi) \qquad B = (\pi, 2\pi).$$

Olgu ϕ_1 ja ϕ_2 sellised, et

$$\phi_1^{-1}(u) = (\theta, t) \implies \phi_2^{-1}(u) = (\theta, t),$$

kus $\theta \in A$ ja $t \in F$. Kui $\theta \in A$, siis üleminekufunktsioon $t_{12}(\theta)$ on samasuskujutus $t_{12}(\theta) : t \mapsto t$. Ühisosal B vaatleme kahte võimalust:

- (i) $\phi_1^{-1}(u) = (\theta, t), \phi_2^{-1}(u) = (\theta, t)$
- (ii) $\phi_1^{-1}(u) = (\theta, t), \phi_2^{-1}(u) = (\theta, -t)$

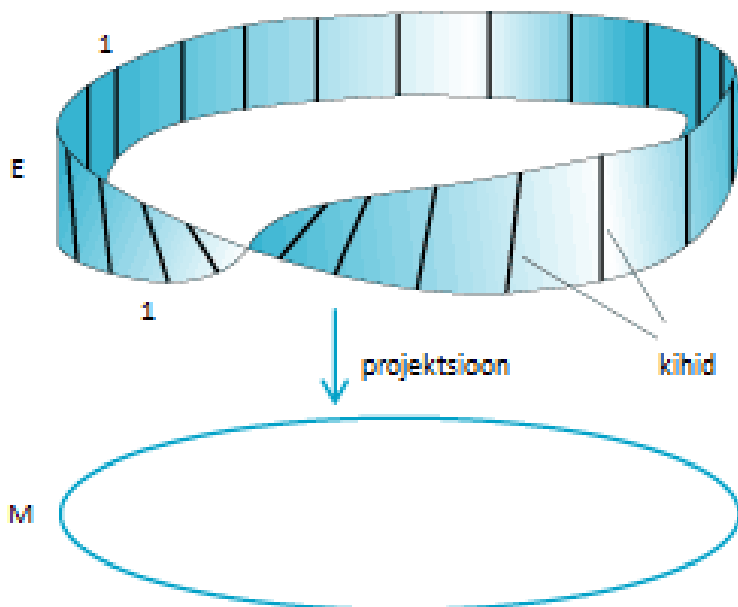
Esimese abil kaetakse ringjoon järgmiselt: ϕ_1^{-1} abil kaetakse $(\pi, 2\pi)$ ja ϕ_2^{-1} abil $(-\pi, 0)$. Kleepides lokaalsed kihtkonnad loomulikult viisil kokku, saadakse **silinder** (vt joon. (2.3)).

Teisel juhul kaetakse ϕ_1^{-1} abil ikka $(\pi, 2\pi) = B$, kuid nüüd põhjustab parameetri t märgimuutus selle, et nüüd vastavad trivialisatsioonid kokku kleepides saadakse **Möbiuse leht** (vt joon. 2.3)).¹ Teame, et kihtidevahelised teisendused moodustavad rühma. Kuna silindri puhul on kihtidevaheline teisendus samasusteisendus, siis $G = \{e\}$. Möbiuse lehe korral aga $G = \{e, g\}$, kus $g : t \rightarrow -t$. Kuna $g^2 = e$, siis $G \cong \mathbb{Z}_2$. See on õpetlik näide, et iga kihtkonna struktuurirühm ei pea olema Lie rühm² [10].

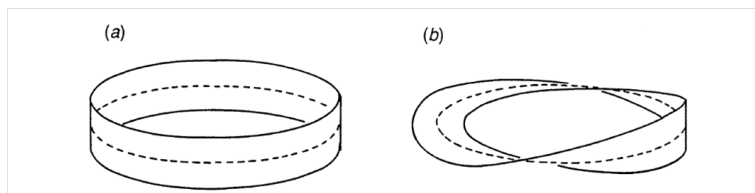
¹Nüüd ongi selge, et suuna muutust võib ette kujutada pinna normaali suuna muutusega, mis on teatavasti Möbiuse eripära (normaali suund on perioodiline perioodiga 4π .)

²Nõuame, et rühma mõõde oleks vähemalt 1

Järeldus 2.1.1 Silinder on triviaalne kihtkond $S^1 \times F$, kuid Möbiuse leht mitte.



Joonis 2.2: Möbiuse leht. Parameetri märgimuutust võib vaadelda kui kihi elemendi 1 asukohamuutust ülemiselt servalt alumisele servale..



Joonis 2.3: (a) - Silinder - triviaalne kihtkond $S^1 \times I$; (b) Möbiuse leht. .

2.2 Peakihkkonnad

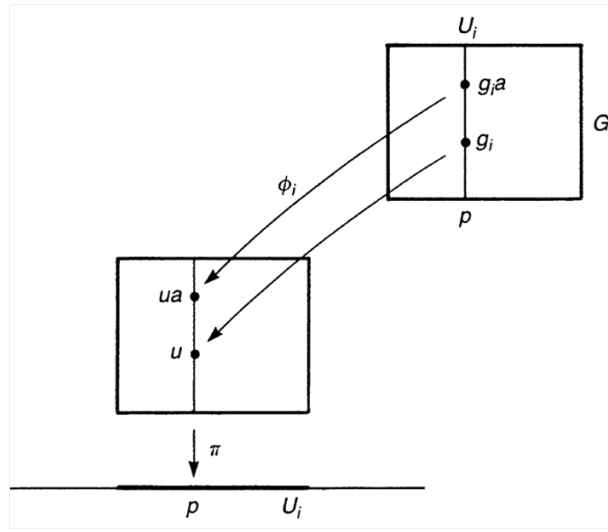
Peakihkkonna kiht F on identne struktuurirühmaga G . Täpsemalt - $F_p = \pi^{-1}(p)$ ja G on difeomorfne. Peakihkkonda tähistatakse $P \xrightarrow{\pi} M$ või $P(M, G)$. Üleminekufunktsioonid toimivad kihil vasakult, kuid võib defineerida ka parempoolse toime.

Olgu $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ lokaalne trivialisatsioon, mis on defineeritud $\phi^{-1}(u) = (p, g_i)$ kus $u \in \pi^{-1}(U_i), p = \pi(u)$. Defineerime Lie rühma G toime hulgal $\pi^{-1}(U_i)$

järgmiselt: $\phi_i^{-1}(ua) = (p, g_i a)$ (vt joonis ??) iga $a \in G$ ja $u \in \pi^{-1}(U_i)$ jaoks. Kuna p.p. toime kommuteerub v.p. toimega, siis see def on sõltumatu lokaalsetest trivialisatsioonidest. Näitame selle:

Kui $p \in U_i \cap U_j$, siis $ua = \phi_j(p, g_j a) = \phi_j(p, t_{ji}(p)g_i a) = \phi_i(p, g_i a)$ Kuna kiht on Lie rühma struktuuriga ja sellel toimivad üleminekufunktsioonid t_{ji} , siis ühisosal ei ole vahet, millist lokaalset trivialisatsiooni kasutada [10].

Järeldus 2.2.1 Rühma G p.p. toime on defineeritud lokaalsetest trivialisatsioonidest sõltumatult. Seda tähistatakse $P \times G \rightarrow P$ või $(u, a) \mapsto ua$.



Joonis 2.4: Lie rühma G p.p. mõju peakihtkonnale.

$$\phi_i(p, g_i a) = \phi_i(p, g_i) a = ua = u = \phi_i(p, g_i) \Rightarrow a = e \in G \quad [10].$$

Olgu antud lõige $s_1(p)$ üle U_i . Defineerime kindlat tüüpi lokaalse trivialisatsiooni, täpsemalt lõike s_i , järgmiselt. Kuna $s_i(p) \in \pi^{-1}(U_i) \subset P$ ja kõik peakihtkonna elemendid saab avaldada kujul ua , $a \in G$, siis iga $u \in \pi^{-1}(p)$, $p \in U_i$ jaoks leidub ühene element $g_u \in G$, et

$$u = s_i(p)g_u. \quad (2.1)$$

Nüüd avaldub lokaalne trivialisatsioon ϕ_i : $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_u)$.

Definitsioon 2.2.1 Kanooniliseks lokaalseks trivialisatsiooniks (kanoo-

niliseks lõikeks) nim kujutust s_i , mis on defineeritud järgmiselt:

$$s_i(p) = \phi_i(p, e) \quad s_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i) \quad (2.2)$$

Def põhjal $\phi_i(p, g) = \phi_i(p, e)g = s_i(p)g$. Kui $p \in U_i \cap U_j$, siis [10]

$$s_i(p) = \phi_i(p, e) = \phi_j(p, t_{ji}(p)e) = \phi_j(p, t_{ji}(p)) = \phi_j(p, e)t_{ji}(p) = s_j(p)t_{ji}(p)$$

$$s_i(p) = s_j(p)t_{ji}(p) \quad (2.3)$$

2.3 Seostus kui kovariantne diferentsiaal

Terminoloogiast: Pangem tähele, et vektorväljaks nimetatakse muutkonna puutujakihtkonna lõiget, seega on vektorväli vektorkihtkonna lõike erijuht ³. Olgu järgnevas määratud vektorväljad v ja w . Vaatleme vektorvälju üle muutkonna (iga kihtkond on muutkond). Üldjuhul on v vektorkihtkonna lõige ja w väli baasmuutkonnal. Uurime vektorvälja v muutust liikumisel mööda välja w . Tähistuse mugavuse huvides ei märgita edaspidises vektorit punktis p kui v_p , vaid tähistame ka vektori meelevaldses punktis v . Defineerime **seostuse** mõiste läbi lokaalsete koordinaatide (koordinaatkaartide). Selleks nõuame, et vektori v komponendid liikumisel mööda mööda vektorvälja w ei muutu [11]:

$$w^j(\partial_j v^k) = 0 \quad (2.4)$$

Viimane on suunatuletise valem ruumis $\mathbb{R}^n$. Pangem tähele, et praegusel juhul puudub eelistatud lokaalne kaart, siis mõnes muus lokaalses koordinaatkaardis $\tilde{x}^\mu$ võtab viimane avaldis pärast mõningaid teisendusi kuju

$$\tilde{w}^l(\tilde{\partial}_l \tilde{v} + \tilde{A}_l \tilde{v}) = 0, \quad (2.5)$$

³Justnimelt vektorkihtkonna lõiked on need, mille seostus vektorkihtkonnal toimib.

kus $\tilde{v}$ on vektor, $\tilde{A}_l$ on maatriks elementidega $\tilde{A}_{ln}^m$ (viimaseid nimetatakse **Christoffeli 2. liiki sümbooliteks**). Need osutuvad ühtlasi ka **seostuse komponentideks**). Vektori v suuna konstantsust liikumisel vektorvälja w saab vaadelda paralleeltranspordina. Viimase idee saab globaalselt kokku võtta, valides lokaalse koordinaatsüsteemi ja seejärel nõudes tingimuse (2.4) täidetust. Kui defineerida vektorvälja v suunamuutus vektorvälja w suunal **seostuse kovariantse diferentsiaalina**

$$D_w v \equiv w^l (\partial_l v + A_l v), \quad (2.6)$$

siis on selge, et tingimus (2.4) tähendab seda, et vektorväli v välja w suunas ei muutu [11].

2.4 Vektorkihtkonnad

Vektorkihtkond on kihtkond, mille kihiruumiks on vektorruum. Piltlikult võib seda ette kujutada, sidudes iga (baas)muutkonna punktiga p vektorruumi V_p (punktile p vastav kiht). Nii defineerides saab välja igas muutkonna punktis p esitada vektori $m \in V_p$ kaudu. Kui nõuda, et vektorruumi V_p mõõde oleks igas muutkonna punktis sama, saamegi **vektorkihtkonna** (tähistame E -ga). Üldiselt defineeritakse kovariantne diferentsiaal kui funktsioon, mis avaldub igas lokaalses kaardis kujul (2.6). Kui defineerida puutujakihtkond kõikide muutkonna punktide puutujaruumide hulgana, siis on selge, et vektorkihtkond on puutujakihtkonna üldistuseks, kui loobuda nõudest, et vektor peab olema puutujavektor. Eelnevas jaotises defineerisime peakihtkonnal lõike kui lokaalse trivialisatsiooni, mis seab igale baasmuutkonna elemendile p vastavusse elemendi peakihtkonnal. Kuna aga iga kihi elemendi sai avaldada lõike ja $g \in G$ korrutisena, siis võib vaadelda Lie rühma G toimet lõikel. Toime tulemusel saadakse erinevaid kihi elemente. Kuna praeguses jaotises on kihiks vektorruum, siis võib lõiget vektorkihtkonnal käsitleda kui kujutust, mis paneb igale baasmuutkonna punktile p vastavusse vektori kihil V_p [11].

Näide 2.4.1 Temperatuuriväli kohvitassi pinnal on näide lõikest vektorkihtkon-

nal. Igale kohvitassi pinna punktile p pannakse vastavusse reaalarv (temperatuurinäit) ($\mathbb{R}$ on vektorruum üle iseenda).

Kuna nüüd võib kihi elemente vaadelda vektoritena s (kujutuse s mõjumisel saadakse vektor), siis saame eespool toodud kovariantse diferentsiaali definitsioonivalemiga (3.7.6) vektori v lõikega s asendades

$$D_w s \equiv w^j (\partial_j s + A_j s) \quad (2.7)$$

. Viimases on A_j **seostuse maatriks**. Nüüd on ka selge, et erijuhul, kui mingis lokaalses kaardis $A_j = 0$, siis esitub diferentsiaali nulliga võrdumise nõue kujul (2.4), kuid *alati seda nõuda ei saa*. Võrrand (2.4) oli antud lihtsalt motivatsioonina kovariantse diferentsiaali mõistele [11].

3 YANG-MILLSI TEOORIA. SELLE SEOS KAASAEGSE DIFERENTSIAALGEOMEETRIAGA

3.1 Miks on Yang-Millsi teooriad olnud nii edukad?

20. sajand tõi dünaamika uurimisse uued suunad. Selle asemel, et uurida, kuidas jõud otseselt osakesi mõjutavad, hakati uurima süsteemide sümmeetriaid. 1954. aastal tõid Chen Ning Yang ja Robert Mills Maxwelli teooriast inspireerituna sisse uued teatavat tüüpi kalibratsiooniinvariantsed väljateooriad. Yang-Millsi teooriate põhieelis seisneb selles, et neid osatakse kvantiseerida. Yang-Millsi teooriate kvantiseeritud mudelid — kvantelektrodünaamika, Salami ja Weinbergi elektronõrga vastasmõju teooria, elementaarosakestefüüsika standardmudel ja ühenduste teooriad (ing k *grand unified theories*) — ongi saanud 20. sajandi teise poole osakestefüüsika alustalaks. Kuigi Yang-Millsi teooriate ajalugu on pikk ja käänulline, jõudsid matemaatikud ja füüsikud 1970ndatel oma erimeelsustes kokkuleppele ning sealt alates on saatnud Yang-Millsi teooriaid märkimisväärne edu [11].

Yang-Millsi võrrandeid võib vaadelda kui automaati (masinat), mis võtab sisendiks teatava sümmeetriakitsenduse, täpsemalt — invariantsuse mingi meelevaldse kalibratsioonisümmeetria suhtes — ja annab väljundiks seda sümmeetriakitsendust rahuldava klassikalise väljateooria, mille tähtsaks omaduseks on renormeeritavus. Viimane loob viljaka pinnase kvantiseerimisprotseduurideks [11]. Olgu siinkohal märgitud, et Gerardus 't Hooft ja Martinus Weltman, kes Yang-Millsi teooria renormeeritavuse võimalikkuse tõestasid, said selle eest Nobeli preemia.

Kaasaegses füüsikas on põhiprobleemiks gravitatsioonilist vastasmõju kirjeldava mudeli (üldrelatiivsusteooria) kvantiseerimine. Kuigi üldrelatiivsusteoorias kehtib teatav kalibratsioonisümmeetria, ei osata praegusel ajal üldrelatiivsusteooriat

Yang-Millsi teooriaga seostada [11].

3.2 Kalibratsiooniteooriate liigitus sümmeetriarühma järgi

On teada, et kalibratsiooniteooriate üldine idee on leida väljateooriaid, mis oleks invariantse kalibratsiooniteisenduste suhtes. Mainime, et käesolevas jaotises on kihtkonnaks peavektorkihtkond P .

Kalibratsiooniteooriate liigitus struktuurirühma järgi:

Abeli kalibratsiooniteooriad	kommutatiivne $U(1)$	
Mitte-Abeli kalibratsiooniteooriad :		
*nõrk vastasmõju	$SU(2)$	cl
*elektronõrk vastasmõju	$U(1) \times SU(2)$	
*tugev vastasmõju (kvantkromodünaamika)	$SU(3)$	
*elementaarosakeste standardmudel	$U(1) \times SU(2) \times SU(3)$	

Järgnevalt esitame lühidalt kalibratsiooniteooria olemuse ja struktuurid, mida teoorias kasutatakse:

- (i) Kõigepealt määratletakse baasmuutkond M , üle mille teooriat vaadeldakse. Yang-Millsi teooria korral viimaseks „väändunud” Minkowski ruum, elektromagnetilise vastasmõju korral erijuhuna „väändumata” Minkowski ruum.
- (ii) Teine vajalik struktuur on peavektorkihtkond P . Selle üheks struktuuriks on Lie rühm, mille kirjeldus on antud allpool.
- (iii) Sõltuvalt teooria tüübist (kvantelektrodünaamika, kvantkromodünaamika, elektromagnetiline, elektronõrk vastasmõju teooria) määratletakse vastav **kalibratsioonirühm ehk sümmeetriarühm** (Lie rühm). Valitakse konkreetne rühma G esitus V . Esitus V määrab kihid V_p ($p \in M$), kuna on defineeritud Lie rühma toime kihielementidele. Eelnevast on teada, et lõige on lokaalne trivialisatsioon (tulemuseks peakihtkonna element), mille saab

esitada Lie rühma vastava elemendi $g(p)$ parempoolse toime kaudu. Funktsiooni $g(p)$ nimetatakse **kalibratsiooniteisenduseks** või **kalibratsioonisümmeetriaks**. Yang-Millsi teooria kui klassikaline väljateooria on selle teisenduse suhtes invariantne [11].

- (iv) Määratletakse fundamentaalne füüsikaline väli. Yang-Millsi teooria korral on selleks seostus D_w , elektromagnetilise vastasmõju teooria korral vektorpotentsiaal A_μ . Teooria võrrandid taandatakse seostuse komponentide D_w (vt valemile (2.4) järgnevalt tähistuste selgitust) leidmisele [11].

3.2.1 $U(1)$ kalibratsiooniteooria

Yang-Millsi teooria esimene näide on elektromagnetilise vastasmõju teooria (Maxwelli teooria), kuigi Maxwell ise ei teadnud, et tema teooria rahuldab teatavat tüüpi kalibratsiooniinvariantust.

- (i) Elektromagnetilise vastasmõju korral on baasmuutkonnaks M erijuhuna tavapärase Minkowski ruum.
- (ii) Sümmeetriarühm $U(1)$, ühikkompleksarvud.
- (iii) $U(1)$ määratletud kihid $V_p = \mathbb{C}$ (1-mõõtmeline vektorruum). Lõikeks $s(p)$ on kompleksarvuliste väärtustega funktsioonid üle Minkowski ruumi.
- (iv) Füüsikaliseks väljaks on vektorpotentsiaal A_μ . Võrrandid seostuse komponentide D_w leidmiseks osutuvad **Maxwelli võrranditeks**. Seostuse komponendid (maatriksid) osutuvad kompleksarvudeks ja kõveruse komponendid osutuvad **Faraday tensoriks** [11].

3.2.2 Yang-Millsi kalibratsiooniteooria

Yang-Millsi teooria korral on struktuur veidi keerulisem.

- (i) Baasmuutkond M on „vääändunud” Minkowski ruum (st Minkowski ruum on varustatud mittetriviaalse seostusega)
- (ii) Sõltuvalt teooria tüübist (kvantelektrodünaamika, kvantkromodünaamika, elektromagnetiline, elektronõrk vastasmõju teooria) määratletakse vastav

mittekommutatiivne kalibratsioonirühm ehk sümmeetriarühm (Lie rühm).

- (iii) Kihid V_p ($p \in M$) on vektorruumid, millel on määratud kalibratsioonirühma toime. Vektorruumi mõõde sõltub kalibratsioonirühma valikust.
- (iv) Füüsiliseks väljaks on **seostus** D_w . Võrrandid seostuse komponentide D_w leidmiseks on **samaväärsed Yang-Millsi väljavõrranditega**[11].

3.3 Yang-Millsi väljavõrrandid

$$d_D F = 0 \tag{3.1}$$

$$*d_D * F = J \tag{3.2}$$

3.4 Yang-Millsi võrrandite geomeetrilise tausta eeltöö

3.4.1 Muutkond

Muutkond on ruum, milles füüsilised objektid „elavad”, seepärast määrab see paljuski teooria omadused [11]. Yang-Millsi korral on tegu „**väändunud**” **Minkowski muutkonnaga**.

3.4.2 Seostus D

Seostuse (erijuhul vektorpotentsiaal) füüsikaline tähtsus seisneb selles, et ta lisab Minkowski ruumile väände. Matemaatiliselt näitab seostus seda, mis reeglite järgi muutkonnal objektide liigutamine toimub.. Kuigi see esineb võrrandites vaid alaindeksina, määrab see tegelikult kõik teised võrrandis esinevad suurused, v.a. voolu J . Kui aga vool on antud, siis on Yang-Millsi võrrandite sisuks lihtsalt panna seostusele D täiendavaid lisakitsendusi.

Seostuse füüsikaline sisu

Füüsikaliselt on seostus teooria füüsikaline väli. Maxwelli võrrandite korral on seostuseks lihtsalt elektromagnetiline potentsiaal A_μ . Füüsikud ja matemaatikud mõistavad seostust erinevalt. Füüsikud ei mõista, miks etendab nende uuritav füüsikaline väli tähtsat rolli paralleeltranspordis ja matemaatikud ei tea, miks objekt, mida nemad kasutavad paralleeltranspordiks, omab tähtsust füüsikalise väljana [11].

3.4.3 Seostuse kõverus F .

Füüsikaliselt on kõverus kõige tähtsam komponent, mõõtes „väändunud” ja väändumata Minkowski ruumi geometria erinevust. Geomeetria muutus avaldub osakese liikumistrajektoori muutuses. Selleks, et teada, kuidas kõverus osakesi otseselt mõjutab, peab aga teada olema Lorentzi jõu avaldise konkreetne üldistus ehk kõveruse konkreetne kuju. Olgu öeldud, et Yang-Millsi teooria kõverus F lihtsustub Maxelli teoorias elektromagnetvälja tensoriks (Faraday tensoriks), põhjenduse sellele anname järgmises lõigus. Yang-Millsi teooria üldistab ilma kõveruseta Minkowski aegruumi [11].

Olgu w ja v vektorväljad ja s meelevaldne lõige. Defineerime kõveruse

$$F(v, w)s \equiv D_v D_w s - D_w D_v s - D_{[v, w]}s \quad (3.3)$$

Leiame selle kuju lokaalses kaardis $F(v, w) = v^j w^k F_{jk}$. Viimases on F_{jk} kõveruse komponendid $F_{jk} \equiv F(\partial_j, \partial_k)$. Kuna vektorväli on kommutaatori suhtes kinnine, siis F_{jk} on kihi suhtes kinnine.

Teame, et **Schwarzi teoreemi** põhjal

$$[\partial_j, \partial_k] = 0 \quad (3.4)$$

Rakendades seost (2.7) (A_j on seostuse maatriksid), saadakse lõike meelevaldsust arvestades

$$F_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j + [A_j, A_k] \quad (3.5)$$

Paneme tähele, et elektromagnetismi korral on seostuse maatriksid A_j kommutatsioonid (kommuteeruvad), seetõttu saadakse U(1) korral **Faraday tensor**: $F_{jk} \equiv \partial_j A_k - \partial_k A_j$. On huvitav tähelepanek, et kui Yang üritas saada mitte-Abeli kalibratsiooniteooriat Maxwelli teooria üldistusena, arvas ta esimesed aastad, et viimane avaldis on seostuse komponentide leidmiseks täielik. Faraday tensori kasutamise ebaedu põhjustas kommutaatoriga liikme lisamise mõned aastad hiljem [11].

Faraday tensori kalibratsiooniinvariantus

Selles alajaotises vaatleme Yang-Millsi teooria erijuhtu — Maxwelli U(1) kalibratsiooniteooriat. Jaotise geomeetiline taust seisneb eelnevalt näidatud tõsiasjal, et U(1)-juhul osutuvad seostuse kõveruse komponendid Faraday tensoriks.

Lemma 3.1 Faraday tensor $F^{\mu\nu}$ on invariantne järgmise kalibratsiooniteisenduse suhtes: $A^\alpha \rightarrow A^\alpha + \partial^\alpha \lambda$, kus A^α on algne potentsiaal ja $A^\alpha + \partial^\alpha \lambda \doteq A^\mu$ uus potentsiaal [8]. Suurust λ on suvaline sile funktsioon. Seda võib tõlgendada vektorkihtkonna lokaalsete trivialisatsioonide vahelise üleminekukujutusena.

Tõestus: järeldub otseselt seosest (3.4) $\square$

On lihtne veenduda, et ka $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ on invariantne selle teisenduse suhtes.

Lemma (3.1) füüsikaline sisu:

Kaks erinevat vektorvälja (A^μ), mis on omavahel seotud kalibratsiooniteisendusega, esitavad füüsikaliselt sama elektromagnetvälja (esindajaks $F^{\mu\nu}$). Teisendus $A^\alpha \rightarrow A^\alpha + \partial^\alpha \lambda$ füüsikalist mõju ei oma - seda ei saa mõõta. Mõõdetav väli ongi $F^{\mu\nu}$ [8].

Lemma 3.2 Iga 4-potentsiaali korral A_μ saab leida kalibratsioonifunktsiooni λ nii, et teisendatud $\tilde{A}^\mu$ rahuldab Lorenzi kalibratsiooni tingimust: $\partial_\mu \tilde{A}^\mu = 0$ [8].

3.4.4 Kovariantne välisdiferentsiaal d_D kihtkondadel

Operaator d_D näitab, kui kiiresti muutub suurus, millest tuletist võetakse, erinevates suundades muutkonnal. Seetõttu väidab Yang-Millsi 1. võrrand (vt avaldist (3.1)) $d_D F = 0$, et teatud mõttes kõverus muutkonnal liikudes ei muutu. Seda võiks tõlgendada nii, et igas muutkonna osas on geomeetria erinevus Minkowski

ruumi geomeetriast teatud mõttes ühesugune. See võrrand ei väida, et Faraday tensor F ei võiks muutuda, vaid seda, et Faraday tensor *ei muutu* käsitletava *seostuse suhtes* (osutub, et elektromagnetilise vastasmõju korral ei ole seostuse roll siinkohal tähtis, sest d_D osutub välisdiferentsiaaliks d). Määratleme kihtkonna F : olgu selleks p -vormide kovektorkihtkond $\Omega^p M$, kus kihtideks on kovektorruumid $\Lambda^p(T_p^* M)$. Eelnevas on defineeritud kovariantne diferentsiaal vektorkihtkonnal E ja diferentsiaalvormide lisast saab meelde tuletada, kuidas käib diferentsiaalvormide välisdiferentseerimine. Selles jaotises defineerime välis-kovariantse diferentsiaali, mis on eelpool nimetatud operaatorite üldistuseks [11].

E -väärtustega p -vormid

Töötame välja vektorkihtkondade kombineerimise meetodi. Olgu E ja F vektorkihtkonnad vastavate kihtidega V_p ja W_p , kus $p \in M$ on meelevaldne baasmuutkonna punkt. On selge, et vektorkihtkondade kombineerimiseks on vaja kombineerida kihid V_p ja W_p . Moodustame uue kihtkonna $E \otimes F$, milles on kihiks tensorkorrutis $V_p \otimes W_p$.

Definitsioon 3.4.1 E -väärtustega p -vormiks nimetatakse kihtkonna $E \otimes \Omega^p M$ lõiget.

Selgitame antud definitsiooni tausta, selleks leiame lõike kuju lokaalses kaardis. See avaldub $E_{j_1, \dots, j_p} \otimes (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p})$. Nagu tavaline p -vorm mõjub vektorväljade tensorkorrutisele, et anda tulemuseks skalaarväli, on ka siit on selgelt näha, et E -väärtustega p -vorm annab loomulikult moel vektorväljade tensorkorrutisele mõjudes kihtkonna E lõike [11].

Vektorkihtkond $\text{End}(E)$. Seostuse kõverus kui E -väärtustega 2-vorm

Eelnevalt oli antud kõveruse avaldis seostuse D kaudu. Nüüd defineerime uue endomorfism-vektorkihtkonna — $\text{End}(E)$. Nimetuse põhjus seisneb selles, et selle vektorkihtkonna kihtideks on endomorfismid $v(p) : V_p \rightarrow V_p$. Defineerime kõveruse 2-vormi $F = F_{jk} \otimes dx^j \wedge dx^k$. Näitame, et viimane on $\text{End}(E)$ -väärtustega

2-vorm. Olgu $v = v^j \partial_j$ ja $w = w^k \partial_k$. Arvutame:

$$(F_{jk} \otimes dx^j \wedge dx^k)(v \otimes w) = \frac{F_{jk}(v^j w^k - v^k w^j)}{2} \quad (3.6)$$

Eespool oli antud F kuju lokaalses kaardis $F = v^j w^k F_{jk}$. Kuna aga F_{jk} on tegelikult kommutaator (seega antisümmeetriline), seega $F_{jk} = -F_{kj}$ ja avaldise (3.6) p.p. võrdub samuti suurusega $F_{jk} v^j w^k$. $\square$

Defineerime nüüd operaatori d_D . Selleks tähistame E -väärtustega p -vormi

$$\omega = s_J \otimes dx^J, \quad (3.7)$$

kus dx^J tähistab korrutist $dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \dots dx^{j_p}$ ja s_J on vastavad lõiked.

Definitsioon 3.4.2 E -väärtustega p -vormi ω kovariantseks välisdiferentsiaaliks nimetatakse avaldist

$$d_D \omega = D_k s_J \otimes dx^k \wedge dx^J, \quad (3.8)$$

kus kasutasime $D_k = D_{\partial_k}$. Pangem tähele, et tegu on tavapärase välisdiferentsiaali arvutamise valemi loomuliku üldistusega. Operaatori kuju avaldub $d_D = D_k \otimes dx^k \wedge [11]$.

Seostus endomorfismkihtkonnal $\text{End}(E)$

Tuletagem meelde, et Yang-Millsi võrrandite fundamentaalväli on seostus D üle peavektorkihtkonna E . Kuna operaator d_D on defineeritud avaldisega 3.8), siis oleks loomulik oletada, et F on E -väärtustega 2-vorm. Eespool on aga näidatud, et F on $\text{End}(E)$ -väärtustega 2-vorm. Nüüd oleks Yang-Millsi 1. võrrandi tõlgendamiseks vaja üldistada kovariantse diferentsiaali mõiste kihtkonnale $\text{End}(E)$. Defineerides kovariantse diferentsiaali kihtkonnal $\text{End}(E)$ kujul $(D_v T)(s) \equiv D_v(Ts) - T(D_v s)$ [11], saab näidata, et võrrand

$$D_j T = \partial_j T + [A_j, T] \quad (3.9)$$

määrab seostuse kihtkonnal $\text{End}(E)$ korrektelt. Kokkuvõtvalt on meil nüüd defineeritud seostuse D mõju peavektorkihtkonna lõigetele. Selle abiga on defineeritud:

- (i) $\text{End}(E)$ -väärtustega kõveruse 2-vorm F
- (ii) Seostus D kihtkonnal $\text{End}(E)$

Punktis (ii) antud seostuse abil on defineeritud ka kovariantne välisdiferentsiaal d_D [11].

3.5 Yang-Millsi 1. võrrandi geomeetriline sisu

1. võrrand avaldub:

$d_DF = 0 \tag{3.10}$

Rakendades kovariantset välisdiferentsiaali d_D $\text{End}(E)$ -väärtustega kõveruse 2-vormile F , saadakse $\text{End}(E)$ -väärtustega 3-vorm, mis loetakse nulliks. Kasutades Jacobi samasust, saab otsese arvutuse teel saada näidata, et Yang-Millsi 1. võrrand kujutab tegelikult **Bianchi samasust** [11]. Yang-Millsi 1. võrrand on üldistus Maxwelli võrranditele $\text{div} \vec{B} = 0$ ja $\text{rot} \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$ nagu demonstreeritud ka lisas nr 4.

3.6 Yang-Millsi 2. võrrandi geomeetriline sisu

3.6.1 Hodge'i täheoperaator ja duaalne vooluvektor J

Järgnevalt üldistatakse lisas nr 4 antud täheoperaator $*$ E -väärtustega p -vormidele. Kui viimane on defineeritud avaldisega (3.7), siis defineerime Hodge'i operaatori mõju järgmiselt:

$$*\omega \equiv \omega_J \otimes *(dx^J) \tag{3.11}$$

Yang-Millsi teooria üldistab Maxwelli teooriast tundub voolutiheduse 4-vektori duaalseks vektoriks J , mis osutub $\text{End}(E)$ -väärtustega 1-vormiks. Seetõttu $J = J_k \otimes dx^k$. Minkowski ruumis võib suurust J_0 vaadelda **üldistatud laenguna**, J_k -d aga **üldistatud vooluna suunas** x^k [11].

Yang-Millsi 2. võrrand avaldub

$$*d_D *F = J \quad (3.12)$$

. Tuletades meelde seose (3.8), st $*d_D = D_i \otimes *dx^i \wedge$ ja arvestades, et $F = F_{jk} \otimes dx^j \wedge dx^k$, anname viimasele valemile lokaalse kuju:

$$D_i F_{jk} \otimes *(dx^i \wedge *(dx^j \wedge dx^k)) = J, \quad (3.13)$$

kus on varasemast teada, et $D_i F_{jk} = \partial_i F_{jk} + [A_i, F_{jk}]$. **Viimased kaks avaldist ongi Yang-Millsi 2. võrrandi lokaalne kuju vektorpotentsiaali A_j kaudu.**

Järeldus 3.6.1 On selge, et Yang-Millsi võrrandid on 2. järku harilikud (üldjuhul mittelineaarsed) diferentsiaalvõrrandid vektorpotentsiaali jaoks. Kui sümmeetriarühmaks on Abeli rühm, siis on selge, et kompleksarvude kommutatiivsuse tõttu kommutaatoreid arvestada ei tule ja tulemuseks on vektorpotentsiaali suhtes lineaarsed diferentsiaalvõrrandid [11].

3.7 Alternatiivne lähenemine Yang-Millsi teooriale. Arvutused diferentsiaalvormide esituses

3.7.1 Vertikaalvektorväli peakihtkonnal

Olgu $P(M, G)$, $\pi : P \rightarrow M, p = \pi(u)$ peakihtkond. Olgu sellel defineeritud Lie rühma parempoolne toime

$$R_g : (u, g) \rightarrow R_g u = u \cdot g \in P, \quad P \times G \rightarrow P$$

Fikseerime peakihtkonnal meelevaldselt punkti $u \in P$ ¹. Tähistagu G_p kihti punktis u . G parempoolne toime R_g tekitab kujutuse $\xi_u : G \rightarrow P$, mis on defineeritud $\xi_u(g) = R_g u$. Viimase diferentsiaal on kujutus $(\xi_u)_* : T_e G \rightarrow T_u P$, sest $\xi_u(e) = u$. Valime Lie algebra elemendi $A \in \mathfrak{g}$. Vaatleme järgmist parempoolset toimet [10]:

$$R_{\exp(tA)} u = \xi_u(\overbrace{\exp(tA)}^{g(t)}) = u \exp(tA).$$

Viimases on t parameeter, mis muutub vahemikus $-\delta < t < \delta$. Peakihtkonnal P saadakse joon (1-parameetriline alamrühm) läbi punkti u , sest $\xi_u(g(0)) = \xi_u(e) = u$. Kuna $\pi(u) = \pi(u \exp(tA)) = p$, siis vaadeldav joon asub kihil G_p . Eelnevast teame, et $T_e G$ võime samastada Lie algebraga $\mathfrak{g}$. Seega $(\xi_u)_* : \mathfrak{g} \rightarrow T_u P$. Kuna $\xi_u(\overbrace{g(0)}^{=e}) = u$, siis

$$(\xi_u)_*(A) = \left. \frac{d}{dt} \xi_u(g(t)) \right|_{t=0} \quad (3.14)$$

Kuna punkt u oli valitud meelevaldselt, siis on G_p igas punktis u määratud puutujavektor $(\xi_u)_*(A)$, täpsemalt **kihi puutujavektor** [10].

Järeldus 3.7.1 Peakihtkonna igas punktis u on määratud vertikaalpuutujavektor $A^\#_u$. Seega on P -l määratud vektorväli $A^\#$ nii, et

$$A^\#(u) = (\xi_u)_*(A), \quad A \in \mathfrak{g} \quad (3.15)$$

Definitsioon 3.7.1 Vektorvälja $A^\#$ nim. Lie algebra elemendi A poolt indutseeritud **vertikaalvektorväljaks**.

Definitsioon 3.7.2 Kõik kihi G_p puutujavektorid punktis u moodustavad $T_u P$ alamruumi, mida tähistatakse $V_u P$ ja nim **vertikaal-puutujavektorite alamruumiks** punktis u .

Saab näidata, et vektorruum $V_u P$ on isomorfne $\mathfrak{g}$ -ga [10]². Tõepoolest, $V_u P = \text{Im}(\xi_u)_*$ (pealekujutus). ξ_u on määratud G p.p. toimega. Viimane on vaba, st kui $R_g(u) = u \Rightarrow g = e$. Seega $(\xi_u)_*$ on ka injektiivne. Seega $V_u P \cong \mathfrak{g}$.

¹kuna $\pi(u) = p$, siis tähendab see ühtlasi ka kihtkonna kihi G_p fikseerimist

²vektorruumide $\mathfrak{g}$ ja $V_u P$ isomorfism on antud kujutusega $(\xi_u)_* : A \mapsto A^\#_u$

3.7.2 Seostus kihtkonnal. Mõisted.

Definitsioon 3.7.3 Öeldakse, et peakihtkonnal P on antud **horisontaalne jaotis**, kui igas punktis $u \in P$ on antud puutujaruumi alamruum $H_u P \subset T_u P$ nii, et

$$T_u P = V_u P \oplus H_u P \quad (3.16)$$

Olgu $y \in V_u P$, $z \in H_u P$. Otsesumma def³ tõttu

$$V_u P \cap H_u P = \{0\} \leftrightarrow x = y + z \in T_u P \text{ esitus on ühene} \quad (3.17)$$

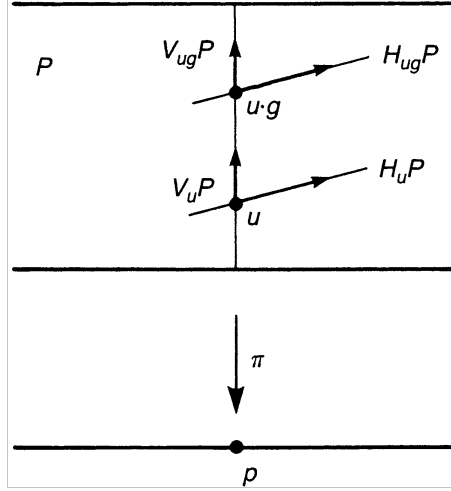
Definitsioon 3.7.4 Seostuseks **peakihtkonnal** P nim. horisontaalset jaotust $(u \rightarrow H_u P)$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

$$(i) \quad \pi_*(H_u P) = T_{\pi(u)} M$$

$$(ii) \quad (R_g)_* H_u P = H_{ug} P$$

Tingimus (ii) näitab, et ruumid $H_u P$ ja $H_{ug} P$ on seotud parempoolse toime tekitatud lineaarkujutusega R_{g*} . Järelduvalt tekitab $H_u P$ kõik samal kihil olevad horisontaalsed alamruumid [10]. Kuna igas kihi punktis on antud horisontaalne jaotus, siis võib seostust vaadata kui kindlat paralleeltranspordimeetodi. Piltlikult öeldes saab puutujavektorit libistada mööda kihti, hoides selle suuna muutumatuks [11].

³Otsesumma kohta vt [12]lk 131



Joonis 3.1: Alamruumid $H_{ug}P$, $g \in G$, saadakse H_uP p.p. toime tulemusel [10].

3.7.3 Seostuse 1-vorm

Olgu $A^\#$ meelevaldne vertikaalvektorväli.

Definitsioon 3.7.5 Seostuse 1-vormiks nim Lie algebra $\mathfrak{g}$ väärtustega vormi ω , mis seab iga peakihtkonna punkti puutujavektorile lineaarselt vastavusse Lie algebra elemendi ja ühtlasi projekteerib T_uP vertikaalsele komponendile $V_uP \simeq \mathfrak{g}$. Lisaks peavad olema täidetud järgmised tingimused:

- (i) $\omega(A_u^\#) = A_u$, $A_u \in \mathfrak{g}$.
- (ii) $R_g^* \omega = Ad_{g^{-1}} \omega$ kus $R_g^* \omega(A_u^\#) = \omega((R_g)_* A_u^\#)$ on *pullback*-kujutus

Kuna $(R_g)_* : T_uP \rightarrow T_{ug}P$, siis on ilmne, et eeskirja (ii) abil saab vormi teisendada uude punkti. Saab näidata, et definitsioonid (3.7.4) ja (3.7.5) on ekvivalentsed [10]. Defineerime horisontaalse alamruumi:

$$H_uP = \{X \in T_uP \mid \omega(X) = \Theta\} \subset T_uP, \quad (3.18)$$

kus Θ on Lie-algebra 0-element.

Järeldus 3.7.2 Horisontaalne alamruum peakihtkonna punktis on seostuse 1-vormi ω tuum, st puutujaruumi elemendi $X \in T_uP$ korral $\omega(X) = \Theta$.

Näitame nüüd def (3.7.4) omaduse (ii). Olgu $u \in P$ ja defineerime H_uP avaldisega 3.18. Valime $X \in H_uP$ ja leiame $R_{g*}X \in T_{ug}P$. Kasutades järgmisi:

pullback'i def, $H_u P$ def ja def (3.7.5) tingimust (ii), arvutame:

$$\omega(R_{g*}X) = R_g^*\omega(X) = g^{-1}\omega(X)g = \Theta.$$

Seetõttu $R_{g*}X \in H_{ug}P$. Paneme tähele, et R_{g*} on pööratav lineaarkujutus. Seega iga $Y \in H_{ug}P$ on avaldatav $Y = R_{g*}X$ mingi $X \in H_uP$ korral [10]. $\square$

Siit järeldub, et ω eraldab ruumi T_uP otsesummaks $H_uP \oplus V_uP$ analoogselt definitsiooniga (3.7.4). Vormi ω nim. selles kontekstis **Ehresmanni seostuseks** [10].

Kovariantne diferentseerimine peakihtkonnal

Olgu ω $\mathfrak{g}$ -väärtustega r -vorm ja $X_1, X_2, \dots, X_{r+1}$ vektorväljad peakihtkonnal P . Välisdiferentseerimisoperaator on kujutus $d : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$. Eelnevas defineerisime peakihtkonnal P $\mathfrak{g}$ -väärtustega 1-vormi ω .⁴

Definitsioon 3.7.6 r -vormi ω kovariantseks diferentsiaaliks nim $\mathfrak{g}$ -v a ar-
tustega $(r+1)$ vormi $D\omega$, mis määratakse valemiga

$$D\omega(X_1, X_2, \dots, X_{r+1}) = d\omega(X_1^H, X_2^H, \dots, X_{r+1}^H) \quad \text{kus } d\omega \equiv d\omega^\alpha \otimes e_\alpha \quad (3.19)$$

Viimases $X_i = X_i^V + X_i^H, X_i^H \in H_uP$ ja $d\omega \equiv d\omega^\alpha \otimes e_\alpha$ on $\mathfrak{g}$ -väärtustega $(r+1)$ -
vorm, $d\omega$ välisdiferentsiaal peakihtkonnal P ja e_α Lie algebra baasivektor [10].

Seostuse 1-vormi lokaalne kirjeldus

Olgu $\{U_i\}$ M -i lahtine kate ja iga U_i jaoks s_i vastav lokaalne lõige. Iga U_i jaoks defineerime Lie-algebra väärtustega 1-vormi $\mathcal{A}_i$ järgmiselt:

$$\mathcal{A}_i \equiv s_i^*\omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i) \quad (3.20)$$

Teoreem 3.1 Iga seostuse 1-vorm ω määrab 1-vormide pere $\{\mathcal{A}_i\}$ seose (3.20) abil. Kehtib ka vastupidine: kui on antud 1-vormide pere $\{\mathcal{A}_i\}$, siis leidub selline seostuse 1-vorm ω , mis on vormide perega $\{\mathcal{A}_i\}$ seotud läbi valemi (3.20) [10].

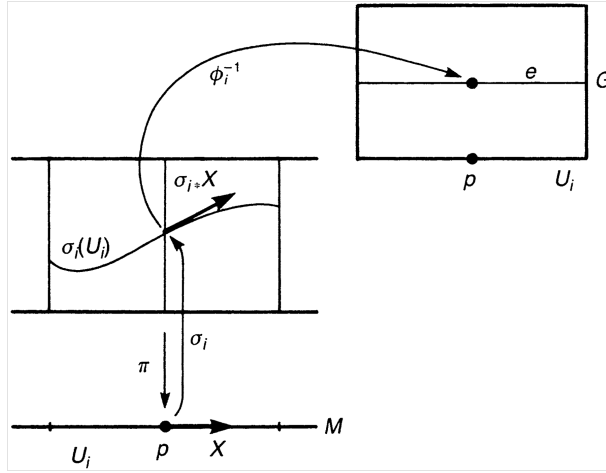
⁴Tuletame meelde, et $\mathfrak{g}$ on lineaarne vektorruum.

Tõestus: $\implies$

Defineerime peakihtkonnal P $\mathfrak{g}$ -väärtustega 1-vormi

$$\omega_i \equiv \text{Ad}_{g_i^{-1}} + g_i^{-1} d_P g_i, \quad (3.21)$$

kus $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$, kus $u = s_i(p)g_i$ on kanooniline lokaalne trivialisatsioon. Näitame, et $s_i^* \omega_i = \mathcal{A}_i$. Olgu $X \in T_p M$. Paneme tähele, et kui oleme punktis $s_i \in P$, siis tingimus 2.1 $u = s_i(p)g_u$ saab kuju $s_i = s_i(p)e$, seega $g_i = e$ ja $s_{i*}X \in T_{s_i}P$. Lokaalse lõike (trivialisatsiooni) def tõttu $\pi_* s_{i*} = \text{id}_{T_p(M)}$ ja $d_P g_i(s_{i*}X) = 0$, sest analoogselt eelnevaga $g \equiv e$ mööda vektorit $s_{i*}X$ [10].



Joonis 3.2: Lõike s_i toimimine. Joonisel on s_i kujutatud tähisega σ_i .

Seetõttu saame:

$$s_i^* \omega_i(X) = \omega_i(s_{i*}X) = \pi^* \mathcal{A}_i(s_{i*}X) + d_P g_i(s_{i*}X) = \mathcal{A}_i(\underbrace{\pi_* s_{i*}}_{\text{id}_{T_p(M)}} X) + \underbrace{d_P g_i(s_{i*}X)}_0$$

$$\text{ja seega } s_i^* \omega_i(X) = \mathcal{A}_i(X)$$

Järgnevalt näitame, et avaldisega (3.21) määratud vorm ω_i täidab def (3.7.5)-ga määratud tingimusi:

- (i) Olgu $X = A^\# \in V_u P$, $A \in \mathfrak{g}$. Saab näidata, et $\pi_* X = 0$. Andes vektori $A^\#$ jaoks alternatiivse def: $A^\# f(u) = \frac{d}{dt} f(u \exp tA) \Big|_{t=0}$, saame:

$$\begin{aligned}
\omega_i(A^\#) &= g_i^{-1} \pi^* \mathcal{A}_i g_i(A^\#) + g_i^{-1} d_P g_i A^\# = g_i^{-1} \mathcal{A}_i \underbrace{(\pi_* g_i(A^\#))}_0 + g_i^{-1} d_P g_i A^\# \\
&= g_i^{-1} d_P g_i A^\# = \underbrace{(g_i(u))^{-1}}_{f(u)} \frac{dg(u \exp(tA))}{dt} \Big|_{t=0} \\
&= (g_i(u))^{-1} g_i(u) \frac{d \exp(tA)}{dt} \Big|_{t=0} = A
\end{aligned}$$

Viimases reas kasutati $g_i(u \cdot g) = g_i(u) \cdot g$. g_i^{-1} on kujutus, mille väärtus iga peakihitkonna punkti u korral on kujutuse g_i väärtuse pöördelement. Tähtis on panna tähele, et dg_i on Lie rühma väärtustega 1-vorm, kuid kui moodustada korrutis $g_i^{-1} dg_i$, siis ta muutub Lie algebra väärtustega 1-vormiks [10].

- (ii) Valime $X \in T_u P$, $h \in G$. Olgu $\gamma(t)$ joon läbi punkti $u = \gamma(0)$, mille puutuja punktis u on X . Saame:

$$\begin{aligned}
R_h^* \omega_i(X) &= \omega_i(R_{h*} X) \stackrel{\omega \text{ def}}{=} g_i^{-1} \pi^* \mathcal{A}_i g_i(R_{h*} X) + g_i^{-1} d_P g_i(R_{h*} X) \\
&= g_{iuh}^{-1} \mathcal{A}_i(\pi_* R_{h*} X) g_{iuh} + g_{iuh}^{-1} d_P g_{iuh}(R_{h*} X)
\end{aligned}$$

Kuna $g_{iuh} = g_{iu} h$ ja $\pi R_h = \pi$, siis ka $\pi_* R_{h*} X = \pi_* X$ ja

$$\begin{aligned}
g_{iuh}^{-1} d_P g_{iuh}(R_{h*} X) &= g_{iuh}^{-1} \frac{d}{dt} g_{i\gamma(t)h} \Big|_{t=0} = h^{-1} g_{iu}^{-1} \frac{d}{dt} g_{i\gamma(t)} \Big|_{t=0} h \\
&= h^{-1} g_{iu}^{-1} d_P g_{iu}(X) h,
\end{aligned}$$

siis saame

$$\begin{aligned}
R_h^* \omega_i(X) &= h^{-1} g_{iu}^{-1} \mathcal{A}_i(\pi_* X) g_{iu} h + h^{-1} g_{iu}^{-1} d_P g_{iu}(X) h \\
&= h^{-1} \omega_i(X) h = \text{Ad}_{h^{-1}} \omega_i(X)
\end{aligned}$$

Seega definitsiooniga (3.7.5) määratud ω_i avaldub tõesti kujul (3.21) ja täidab definitsiooniga (3.7.5) antud 1-vormi aksioome [10]. Jätame lugejale näitamiseks, et saab näidata ka teoreemi teise poole. $\square$

Selleks, et ω oleks määratud P -l üheselt, st et jaotus $T_u P = H_u P \oplus V_u P$ oleks ühene, peab kehtima $\omega_i|_{U_i \cap U_j} = \omega_j$. Siis on ω defineeritud üle terve P . Selleks, et viimane saaks kehtida, peavad vormid $\mathcal{A}_i$ rahuldama teatud tingimusi. Olgu järgnevas $s_i(t) = s_i(\gamma(t))$. Olgu s_i (s_j) lokaalne lõige üle U_i (U_j), kusjuures $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ja lõiked on omavahel seotud seosega (2.3) [10].

Lemma 3.3 Iga $X \in T_p M$ ($p \in U_i \cap U_j$) korral on $s_{i*} X$ ja $s_{j*} X$ seotud järgnevalt:

$$s_{j*} X = R_{t_{ij}*}(s_{i*} X) + (t_{ij}^{-1} dt_{ij}(X))^{\#} \quad (3.22)$$

Tõestus: Olgu $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ joon, $\gamma(0) = p$ ja $\dot{\gamma}(0) = X$. Kehtib $R_{t_{ij}*}(s_{i*}(X)) = R_{t_{ij}*}(X(s_i)) = X(s_i R_{t_{ij}}) = \frac{d}{dt} s_i(t) t_{ij}(p)$. Avaldisest 2.3 saab leida, et

$s_i(p) = s_j(p)[t_{ij}(p)]^{-1}$. Paneme tähele, et valitud algtingimuste tõttu järeldub

$$[t_{ij}(p)]^{-1} t_{ij}(t) \Big|_{t=0} = [t_{ij}(p)]^{-1} t_{ij}(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = e \in G. \text{ Seetõttu saame:}$$

$$\begin{aligned} s_{j*} X &= X(s_j(t)) = \frac{d}{dt} s_j(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \{s_i(t) t_{ij}(t)\} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} s_i(t) t_{ij}(p) + s_i(p) \frac{d}{dt} t_{ij}(t) \Big|_{t=0} = R_{t_{ij}*}(s_{i*} X) + s_j(p)[t_{ij}(p)]^{-1} \overbrace{\frac{d}{dt} t_{ij}(t)}^{\text{liige 2}} \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Kusjuures $R_{g*} = Xg$ ja G on Lie maatriksrühm.

$$[t_{ij}(p)]^{-1} dt_{ij}(X) = [t_{ij}(p)]^{-1} \frac{d}{dt} t_{ij}(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} [t_{ij}(p)]^{-1} t_{ij}(t) \Big|_{t=0} \in T_e G \simeq \mathfrak{g}$$

tõttu tähistab eespool märgitud liige 2 vertikaalvektorvälja $([t_{ij}(p)]^{-1} dt_{ij}(X))^{\#}$ ⁵. Seega lemma (3.3) kehtib [10]. $\square$.

Rakendades vormi ω seosele (3.22), saadakse definitsiooni (3.7.5) tingimusi kasutades:

⁵tuletame meelde, et Lie algebra on isomorfe tema poolt tekitatud vertikaalpuutujavektorite alamruumiga.

$$\begin{aligned}
s_j^* \omega(X) &= \omega(s_{j*} X) = \omega(R_{t_{ij}}^* (s_{i*} X)) + \underbrace{\omega(t_{ij}^{-1} dt_{ij}(X))}^{\substack{t_{ij}^{-1} d t_{ij}(X)}} \\
&= t_{ij}^{-1} \underbrace{\omega(s_{i*} t_{ij} X)}_{\mathcal{A}_i} + t_{ij}^{-1} dt_{ij}(X)
\end{aligned}$$

Kuna vektor $X \in T_p M$ oli suvaline, siis saame järgmise **kooskõlatingimuse**:

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij} \quad (3.23)$$

Samuti saab iga $\{U_i\}$, $\{s_i\}$ ja viimast kooskõlatingimust täitvate $\{\mathcal{A}_i\}$ korral leida sobiva ω üle P .

Seostuse lokaalsete vormide komponente $\mathcal{A}_i$ nim kalibratsioonipotentsiaalideks ehk Yang-Millsi potentsiaalideks [10].

Näide 3.7.1 Olgu $P(M, G)$ peakihtkond üle M ja olgu U kaart M -il. Olgu lõiked s_1 ja s_2 , mis on seotud $s_2(p) = s_1(p)g(p)$. On lihtne ⁶ veenduda, et lokaalsed vormid $\mathcal{A}_1$ ja $\mathcal{A}_2$ on seotud

$$\mathcal{A}_2 = g^{-1} \mathcal{A}_1 g + g^{-1} dg \quad \text{ehk komponentkujul} \quad (3.24)$$

$$\mathcal{A}_{2\mu} = g^{-1}(p) \mathcal{A}_{1\mu}(p) g(p) + g^{-1}(p) \partial_\mu g(p) \quad (3.25)$$

Viimane kujutab endast **Yang-Millsi kalibratsiooniteisendusi** [10].

Seostuse kõverus.

Järgnevas jaotises näidatakse, et seostuse kõveruse võib sisse tuua ka diferentsiaalvormide abil.

Paneme tähele, et selles peatükis on vektorruumiks V Lie algebra $\mathfrak{g}$. Olgu $\dim(\mathfrak{g}) = k$. Vaatleme dif. vormide peatükiga võrreldes üldisemat juhtu, st kuidas

⁶võrrelda avaldisega 3.23. $t_{ij} \in G$

diferentseerida vektorväärtustega r -vormi $\omega \in \Omega^r(P) \otimes V$. Olgu

$$\omega : TP \wedge \cdots \wedge TP \rightarrow V, \quad \omega = \sum_{\alpha=1}^k \omega^\alpha \otimes e_\alpha \quad (3.26)$$

Viimases on $\{e_\alpha\}$ vektorruumi V baas ja $\omega^\alpha \in \Omega^r(P)$.

Definitsioon 3.7.7 Kõveruse 2-vormiks Ω nimetatakse seostuse 1-vormi ω kovariantset diferentsiaali [10], st

$$\Omega \equiv D\omega \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g} \quad (3.27)$$

Lemma 3.4 Kõveruse 2-vorm rahuldab $R_a^* \Omega = a^{-1} \Omega a$, $a \in G$.

Tõestus: Enne oli antud seos $R_a^* H_g P = H_{ga} P$ (üks horisontaalne alamruum punktis tekitab kõik teised alamruumid sel kihil). Sarnaselt sellele kehtib $(R_{a*} X)^H = R_{a*}(X^H)$ ja ka seos 3.84, praeguses kontekstis $d_P R_a^* = R_a^* d_P$. Olgu järgnevas $X, Y \in T_u P$.

Teoreem 3.2 Seostuse 1-vorm ω ja kõveruse 2-vorm Ω rahuldavad Cartani struktuurivõrrandit [10]:

$$\Omega(X, Y) = d_P \omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] \quad (3.28)$$

Cartani struktuurivõrrand $\Omega = d_P \omega + \omega \wedge \omega$ (3.29)
--

Kõveruse lokaalne vorm.

Olgu s lõige baasmuutkonna M kaardil U .

Definitsioon 3.7.8 Kõveruse lokaalne vorm avaldub

$$\mathcal{F} \equiv s^* \Omega \quad (3.30)$$

Lemma 3.5 $\mathcal{F}$ saab avaldada kujul

$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A},$ (3.31)

Tõestus: Teame, et kehtib

$$f^*(\zeta \wedge \omega) = (f^*\zeta) \wedge (f^*\omega). \quad (3.32)$$

Kasutades Cartani struktuurivõrrandit 3.28 ja $\mathcal{A} = s^*\omega$, saame seose $s^*d_P\omega = ds^*\omega$ ja seose 3.32 järgi [10]:

$$\mathcal{F} = s^*(d_P\omega + \omega \wedge \omega) = ds^*\omega + s^* \wedge s^*\omega = dA + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}. \quad \square$$

$\mathcal{F}$ väärtus vektorväljadel $X, Y \in TM$ on antud avaldisega:

$$\mathcal{F}(X, Y) = d\mathcal{A}(X, Y) + [\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)], \quad (3.33)$$

kus d on välisdiferentsiaal muutkonnal M . Leiame järgnevalt $\mathcal{F}$ lokaalse kuju. Olgu $\mathcal{A}_\mu dx^\mu$ kalioxeqnratsioonipotentsiaal. Kui valida $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$, siis tähistades abimuutujad tähtedega A ja B , saadakse $\mathcal{F}$ lemma (3.5) avaldise järgi arvutades:

$$\begin{aligned} A &\doteq \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu \wedge \mathcal{A}_\nu dx^\nu \\ &= [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu](dx^\mu \wedge dx^\nu) \\ B &\doteq d\mathcal{A} = (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (\mu < \nu) \\ 2\mathcal{F} &= \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = 2(A + B) \\ \implies \mathcal{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \end{aligned} \quad (3.34)$$

$\mathcal{F}$ samastatakse **Yang-Millsi väljatugevusega** [10]⁷.

Kuna $\mathcal{A}_\mu$ ja $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ on $\mathfrak{g}$ -väärtustega, siis saab nad avaldada baasi kaudu:

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu^\alpha T_\alpha \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha. \quad (3.35)$$

Võrreldes avaldisega 3.34⁸, leiame $F_{\mu\nu}$ α -nda komponendi, kusjuures paneme

⁷ $\mathcal{F}$ nim ka kõveruse 2-vormiks. Segaduste vältimiseks nim edaspidi Yang-Millsi väljatugevuseks.

⁸Lisades esimese 2 liikme ülaindeksi α ja arendades viimase Lie algebra baasi kaudu

tähele, et summeerimisindeks ei saa olla α , valime β ja γ

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + f_{\beta\gamma}^\alpha A_\mu^\beta A_\nu^\gamma \quad (3.36)$$

Olgu U_i ja U_j ühisosaga kaardid üle M ja $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j$ vastavad väljatugevused. Saab näidata, et ühisosal $U_i \cap U_j$ rahuldavad väljatugevused seosele 3.23 analoogset ⁹ kooskõlatingimust [10]:

$$\mathcal{F}_j = t_{ij}^{-1} \mathcal{F}_i t_{ij} = \text{Ad}_{t_{ij}^{-1}} \mathcal{F}_i \quad (3.37)$$

Yang-Millsi 1. võrrand kui Bianchi samasus seostuse vormide esituses

Kehtib valem $[\omega, \omega](X, Y) = 2[\omega(X), \omega(Y)]$. Seostuse 1-vorm ω ja seostuse kõveruse 2-vorm Ω on $\mathfrak{g}$ -väärtustega (eeldame, et on tegu Lie maatriksalgeb- raga) vormid, seega saame nad avaldada Lie algebra baasi $\{T_\alpha\}$ kaudu: $\omega = \omega^\alpha T_\alpha$, $\Omega = \Omega^\alpha T_\alpha$. Distributiivsuse omadust kasutades arvutame Cartani struk- tuurivõrrandi(3.28) abil komponendi Ω^α [10]:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega &= (\omega^\alpha T_\alpha) \wedge (\omega^\beta T_\beta) = \sum_{\alpha, \beta} (\omega^\alpha \wedge \omega^\beta) T_\alpha T_\beta = \sum_{\alpha < \beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta T_\alpha T_\beta \\ &+ \sum_{\alpha > \beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta T_\alpha T_\beta = [\text{teises liikmes } \beta \leftrightarrow \alpha] \\ &= \sum_{\alpha < \beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta (T_\alpha T_\beta - T_\beta T_\alpha) = \sum_{\alpha < \beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta [T_\alpha, T_\beta] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta [T_\alpha, T_\beta] = [\gamma \leftrightarrow \alpha, \text{Einstein'i tähistus}] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\gamma, \beta} \omega^\gamma \wedge \omega^\beta f_{\alpha\beta}^\gamma T_\alpha \end{aligned} \quad (3.38)$$

Seega $\Omega^\alpha = d\omega^\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\gamma, \beta} \omega^\gamma \wedge \omega^\beta f_{\alpha\beta}^\gamma$. Võttes viimasest välisdiferentsiaali, saame seose (3.84) 2. võrrandit arvestades:

$$d_P \Omega^\alpha = f_{\beta\gamma}^\alpha d_P \omega^\beta \wedge \omega^\gamma - \frac{1}{2} f_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge d_P \omega^\gamma \quad (3.39)$$

⁹Alles on ainult esimene liige

Viimases kasutatakse vormide välisdiferentseerimise valemit (vt avaldise (3.84) 3. võrrandit). Kuna iga peakihtkonna horisontaalse puutujavektori X^H korral kehtib valem (3.7.2), siis on lihtne näidata, et $\Omega(X^H, Y^H) = 0$ ja $D\Omega(X, Y, Z) = d\Omega(X^h, Y^H, Z^H) = 0$, kus D on kovariantne diferentsiaal (vt def (3.7.6) Globaalsel kujul [10]:

$D\Omega = 0 \quad \text{Bianchi samasus} \quad (3.40)$

Bianchi samasuse lokaalne kuju

Kuna kehtib Cartani struktuurivõrrand (vt teoreem (3.28)) ja $d^2 = 0$, siis kasutades võrrandeid (3.20) ja (3.30), s^* lineaarsust ja kooskõllalisust operaatoritega $\wedge$ ja d , saadakse:

$$\begin{aligned}
s^*\Omega &= s^*(d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega) \\
&= s^*(d\omega \wedge \omega) - s^*(\omega \wedge d\omega) = [s^*(d\omega)] \wedge s^*\omega - (s^*\omega) \wedge [s^*(d\omega)] \\
&= ds^*\omega \wedge s^*\omega - (s^*\omega) \wedge [ds^*(\omega)] = d\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} \\
&= \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge \mathcal{F}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

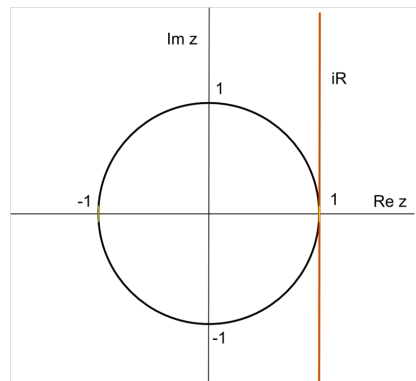
Viies liikmed ühele poole ja defineerides operaatori $\mathcal{D}$, saame

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = d\mathcal{F} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} - \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} = d\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0 \tag{3.42}$$

Paneme tähele, et kui $G = U(1)$, siis $\mathcal{D}\mathcal{F} = d\mathcal{F}$ [10]. Põhjendus: $\mathfrak{u}(n) = \{A | A^\dagger = -A\}$ (vt võrrand (3.80)). On ilmne, 1-mõõtmelisel juhul on tegu antihermiitiliste kompleksarvudega ($\bar{z} = -z$) ehk

Järeldus 3.7.3 $U(1)$ Lie algebra $\mathfrak{u}(1)$ elementideks on **puhtimaginaararvud**.

Kuna $[ai, bi] = 0$, siis on võrduse (3.42) kommutaator $[\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0$ □



Joonis 3.3: $U(1)$ Lie algebra.

Kokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös käsitletakse peaaesjalikult kalibratsiooniteooriaid, kõige põhjalikumalt neist Yang-Millsi klassikalist (kvantiseerimata) väljateooriat. Samuti on lühidalt juttu Lie algebratest, Lie rühmadest ja kihtkondade teoriast ning nende rakendustest kalibratsiooniväljateooriates. Et saada sellest komplitseeritud valdkonnast mingi ettekujutus, tehti teatav eeltöö, millest väike osa sai kirja pandud ka käesolevasse töösse, peamiselt küll lisade kujul. Töö autor loodab, et nii toiminuna ei ole kirjas üleliigselt palju kõrvalist lisamaterjali.

Eeltöö valdkondadeks olid:

- (i) Klassikaline diferentsiaalgeomeetria.
- (ii) Topoloogilised ruumid.
- (iii) Diferentseeruvad muutkonnad, struktuurid muutkondadel.
- (iv) Vektorväljade ja diferentsiaalvormide teooria.
- (v) Lie rühmad ja Lie algebrad.
- (vi) Lagrange'i formalism klassikalises mehaanikas.

Olulisimad töös käsitletud punktid:

- (i) Yang-Millsi klassikaline väljateooria kui kaasaegse kvantväljateooria allikmaterjal

- (ii) Yang-Millsi klassikaliste väljavõrrandite geomeetriline tõlgendus kui kaasaegse diferentsiaalgeomeetria formalismi rakendus.
- (iii) Kalibratsiooniteooriate liigitus Abeli/Mitte-Abeli sümmeetriarühma järgi
- (iv) Väljade lagranžiaanide seos kalibratsiooniteooriatega
- (v) Kihtkondade, Lie rühmade ja Lie algebrate seos kalibratsiooniteooriatega

Tehtud töö on olnud põhiliselt iseseisev. Läbi on tehtud suur hulk praktilisi arvutusülesandeid, mis on aidanud läbitud teoreetilist baasi paremini kinnistada. Ülesandeid on tehtud iga töös mainitud temaatika kohta. Ülesannete paremaks mõistmiseks ja materjali kinnistamiseks on probleemide lahendusi ka süstemaatiliselt illustreeritud. Töö käigus on omandatud iseseisva matemaatilise kirjandusega töötamise oskused.

Selleks, et rääkida elementaarosakestefüüsika standardmudelidest, tuleks teooria kvantiseerida. Tulevikus olekski mõttekas hakata uurima kvantteooria aluseid, uurides muu hulgas ka Yang-Millsi teooria kvantiseerimist. Uuritakse ka kvantväljateooria ja statistilise välja teooria aluseid. Töös mainisime, et Maxwelli võrrandeid oleks süsteemi konfiguratsiooni määramiseks täiendada neid Lorentzi jõu valemiga. Tulevikus võiks uurida seda küsimust Yang-Millsi võrrandite puhul, kus lahendi algtingimused ei pruugi samuti määrata süsteemi hilisemat seisundit. Sõltuvalt magistratöö juhendaja valikust, on **täiendavad võimalikud arengusuunad tulevikuks** järgmised:

Kvantväljateooria ja M-teooria (stringiteooria). Kvantväljateooriatest on üks võimalus uurida näiteks topoloogilisi kvantväljateooriaid nagu 3D- Cherni-Simonsi teooria, mille tõi sisse Edward Witten. Tegemist on Schwarzi-tüüpi topoloogilise teooriaga, mille korral puudub muutkonnal meetrika. Nimi tuleb sellest, et teooria mõjufunktsionaal on proportsionaalne Cherni-Simonsi 3-vormi integraaliga. Cherni-Simonsi vormid on teatud liiki karakteristikud klassid. Karakteristlike klasside teooria on kasulik, sest uuritakse, kuidas saab taandada keerulised füüsikalised probleemid matemaatilisteks probleemideks, mis on juba lahendatud. Cherni klassi kasutatakse palju stringiteoorias. Cherni-Simonsi vormidel on tähtis roll kalibratsiooniväljateooriates. Teooria klassikaline konfiguratsioon sisaldab muutkonda ja kalibratsioonirühma (Lie rühma), täpsemalt on tegemist

peakihtkonna struktuuriga. Samuti võib magistritöös käsitleda Cherni-Simonsi teooria kanoonilist kvantiseerimist. Tulevikus saab uurida ka kalibratsiooniteooriate supersümmeetrilisi laiendeid - supersümmeetrilisi kalibratsiooniteooriaid. Supersümmeetrilise kvantväljateooria eelised seisnevad selles, et paljud probleemid on täpselt lahenduvad. Tasub märkida, et kõige populaarsemad tumeaine mudelid on supersümmeetrilised ning LHC (suur hadronite põrguti) sekundaarne eesmärk on tõendite leidmine supersümmeetria kohta. On võimalus uurida mõnda muud kvantväljateooriat, näiteks konformset väljateooriat, mis teatavasti on üldistuseks Lorentzi teisenduste rühmale. Teoorial on tähtsad rakendused stringiteoorias, statistilises mehaanikas ja kondenseeritud aine füüsikas. Saab uurida ka topoloogilisi stringiteooriaid, mis on teatavasti stringiteooria lihtsustatud versioonid.

Summary (resümee)

The bachelor thesis entitled

Lie Algebras, Fibre Bundles and Their Relevance in Gauge Field Theories,

is a masterpiece written in the Estonian language. The thesis exposes the inextricable connection between *classical* Yang-Mills field theories and contemporary differential geometry. Since the length of the main part of the bachelor thesis is limited to 30-40 pages, most of the relevant background information on Lie algebras and fibre bundles has been excluded. Nevertheless, in order to contribute to the effort of keeping track with the calculations, several sections have been devoted to the theory of fibre bundles, Lie groups and Lie algebras. These can be found mainly in the appendix section.

The principal aim of the author is to give a birds-eye view of the highly contemporary and fundamental subject matter — Yang-Mills gauge field theories. The Yang-Mills theories emerged as a large class of classical field theories generalizing electromagnetism, satisfying a generalized type of gauge symmetry. It is essential to note that all the important theories of modern physics, with the exception of gravitation only, are *quantized* versions of Yang-Mills theories. These include quantum electrodynamics (QED), the electroweak theory, the standard model of particle physics and the grand unified theories (extensions of the standard model). The most significant of these theories is the standard model of particle physics, which is our current best theory explaining the fundamental laws of the Universe. **The geometrical interpretation of the Yang-Mills equations is included in the thesis.**

The key idea of Yang-Mills theories is to generalize the concept of the flat Minkowski space. The connection introduces a “twist” into Minkowski space and the curvature, being the generalization of the Faraday tensor, then measures the extent to which the above mentioned twist causes a deviation from the ordinary flat geometry of Minkowski space. The fundamental physical object in the Yang-Mills equations is the connection. Together with the current, J , the connection completely determines all the physical properties of the system. In the case of the electromagnetic interaction, when the Yang-Mills field equations reduce to

Maxwell's equations, and the connection is then essentially just the electromagnetic vector potential.

The methodology involved independent working with mathematical literature, proving theorems, performing calculations. To obtain a decent general overview, the calculations have been illustrated with appropriate figures and graphs. Most of the figures have been taken from the book [10]. The first graph in the fibre bundle section and the $U(1)$ Lie algebra graphs are done by the author of the thesis.

The literature used is given in the section „Kasutatud kirjanduse loetelu”.

Alari Varmann

Tänuavaldused

Minu suurim tänuavaldus Tallinna Reaalkooli vilistlasele ja Tartu Ülikooli matemaatikateaduskonna doktorandile, **Jaan Vajakale**, kelle abiga sai töö autor palju uusi teadmisi ja ka oskusi, kuidas teooriat praktikas rakendada. Suured tänud ka bakalaureusetöö kaasjuhendajale **Viktor Abramovile**, kes nõustas tööd juhendama, olgugi et töö autor ei õpi Tartu Ülikoolis. Tänan hüva nõu ja abi eest ka Tallinna Küberneetikainstituudi teadlast *Andrei Erraparti*, kes abistas töövormistamise osas keskkonna LaTeX.

Samuti avaldan tänu järgnevatele õppejõududele:

Tõnu Ruus — kvaliteetse klassikalise füüsika alushariduse eest.

Peeter Puusemp — tänan Teid, et õpetasite mulle topoloogiat oma vabast ajast.

Alar Leibak — aitäh kompleksmuutuva funktsioonide ja tensorarvutuse kursuste eest. Samuti, et tegite mulle läbi stereograafilise projektsiooni näite, kuigi ma seda töösse panna ei saanud.

Rein-Karl Loide — tänan lõputöö juhendamise ja kvantmehaanika õpetamise eest.

Samuti aitäh *Joel Paesalule*, et mulle tuleviku suhtes enesekindlust andsite.

Kasutatud kirjanduse loetelu

- [1] Abramov, V. Globaalanalüüs [WWW] http://math.ut.ee/~abramov/konspekt_globaalan.pdf (loengukonspekt)
- [2] Aitchison, I.J.R., Hey, A.J.G. Gauge Theories in Particle Physics. Volume I: From Relativistic Quantum Mechanics to QED. 3rd ed. IOP Publishing Ltd, 2003.
- [3] Flanders, H. Differential Forms with Applications to the Physical Sciences. 2nd ed. Dover Publications, INC, New York, 1989.
- [4] Gauge Theories [WWW] (loengukonspekt) www.physics.uc.edu/~brian/HEP/.../Gauge/Gauge_Theories.ppt (6.06.2012)
- [5] Gilmore, R. Lie Groups. Cambridge University Press, 2008.
- [6] Griffiths, D.J. Introduction to Elementary Particles. John Wiley & Sons, Inc, 1987.
- [7] Lie Group [WWW] http://en.wikipedia.org/wiki/Lie_group#The_Lie_algebra_associated_to_a_Lie_group (18.04.2012)
- [8] Maxwell's Equations [WWW] (loengukonspekt) <http://theoretical-physics.net/dev/src/elmag/elmag.html#equation-lagem> (18.04.2012)
- [9] Naber, G. Topology, Geometry and Gauge Fields, Foundations. 2nd ed. Springer Science+Business Media, LLC 2011.
- [10] Nakahara, M. Geometry, Topology and Physics. 2nd ed. IOP Publishing Ltd, 2003.

- [11] Nielsen, M. Introduction to Yang-Mills Theory [WWW] <http://michaelnielsen.org/blog/introduction-to-yang-mills-theories>
(18.04.2012)
- [12] Puusemp, P. Üldalgebra alused. 2. trükk, TTÜkirjastus, 2012.

LISAD

Lisa 1 Kalibratsiooniteisendused

Dimension	Group	H	U
1×1	$U(1)$	θ	$e^{i\theta}$
2×2	$SU(2)$	$\theta I + \vec{\tau} \cdot \vec{a}$	$e^{i\theta} e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{a}}$
3×3	$SU(3)$	$\theta I + \sum_{i=1}^8 \lambda_i \cdot b_i$	$e^{i\theta} e^{i \sum_{i=1}^8 \lambda_i \cdot b_i}$

Joonis 3.4: Kalibratsiooniteisendused. Allikas: [4].

Tähistused:

$\vec{\tau}$ - Pauli spinnmaatriksid

group - teisenduse struktuurirühm (Lie rühm)

dimension - struktuurirühma (Lie rühma) mõõde

H - hermiitiline maatriks

$U = \exp(iH)$ - unitaarne maatriks

Kalibratsiooniteisenduse üldine kuju:

$$\psi \rightarrow U\psi \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}U^\dagger \quad (3.43)$$

Lisa 2 Vektorväljad ja nende seos Lie operatsioonidega

Integraalkõverate voog ja Lie diferentseerimine.

Olgu X vektorväli muutkonnal M . Integraalkõver (int. kõver) $x(t)$ on joon, mille puutujavektor punktis $x(t)$ ¹⁰ on $X|_x$. Kui on antud kaart (sel juhul saab anda vektorväljale ja integraalkõverale lokaalse kuju) (U, ϕ) , siis [10]

$$\frac{dx^\mu}{dt} = X^\mu(x(t)) \quad (3.44)$$

kus $x^\mu(t)$ on $\phi(x(t))$ μ -s komponent. Selleks, et leida vektorvälja integraalkõver, tuleb lahendada harlike diferentsiaalvõrrandite süsteem (HDVS) ¹¹ (3.44). Edaspidi eeldame, et parameetri t määramispiirkond on maksimaalne. Pangem tähele, et kompaktse muutkonna jaoks leidub iga etteantud vektorvälja ja punkti korral antud punkti läbiv vektorvälja integraalkõver, mille määramispiirkonnaks on $\mathbb{R}$. Olgu $\sigma(t, x_0)$ vektorvälja X integraalkõver. Seos 3.44 võtab kuju [10]

$$\frac{d}{dt}\sigma^\mu(t, x_0) = X^\mu(\sigma(t), x_0) \text{ algtingimusega } \sigma^\mu(0, x_0) = x_0^\mu. \quad (3.45)$$

Piirdume järgnevas täielike vektorväljadega, st eeldame, et parameetri t määramispiirkond on $\mathbb{R}$.

Definitsioon 3.7.9 Kujutust $\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ nimetatakse vektorvälja $X \in \mathcal{X}(M)$ vooks [10].

Difeomorfismide üheparameetriline rühm

Defineerime $\sigma_t(x) = \sigma(t, x)$. Kindla $t \in \mathbb{R}$ väärtuse korral on voog $\sigma_t : M \rightarrow M$ difeomorfism. Osutub, et σ_t täidab järgmisi tingimusi [10]:

- (i) $\sigma_t(\sigma_s(x)) = \sigma_{t+s}(x)$ kujutuste kompositsioon
- (ii) σ_0 ühikelement - samasuskujutus
- (iii) $\sigma_{-t} = (\sigma_t)^{-1}$ pöördelement - pöördkujutus

¹⁰NB! x tähistab nii punkti U -s kui selle koordinaate

¹¹saab veenduda, et HDVS lahend eksisteerib ja on ühene

Definitsioon 3.7.10 Saadud kommutatiivset rühma nimetatakse difeomorfismide üheparameetriliseks rühmaks. Rühma elementideks on kujutused σ_t , kus vektorvälja täielikkuse eelduse tõttu on t määramispiirkonnaks $\mathbb{R}$. Rühma tehteks on kujutuste järjest rakendamine [10].

Olgu antud vekt. väli X . Tähistame lõpm. väikese teisenduse σ_ε . Avaldise (3.45) järgi saame punkti x uueks koordinaadiks $\sigma_\varepsilon^\mu(x) = \sigma^\mu(\varepsilon, x) = x^\mu + \varepsilon X^\mu(x)$. Vektorväli X on **lõpmata väikese teisenduse generaator**. Hindame punkti koordinaati, mis erineb algpunktist parameetri t võrra mööda integraaljoont. Arendades Tayloriga, saadakse [10]:

$$\begin{aligned}\sigma^\mu(t, x) &= x^\mu + t \frac{d}{ds} \sigma^\mu(s, x) \Big|_{s=0} + \frac{t^2}{2!} \left(\frac{d}{ds} \right)^2 \sigma^\mu(s, x) \Big|_{s=0} + \dots = \\ &= \left[1 + t \frac{d}{ds} + \frac{t^2}{2!} \left(\frac{d}{ds} \right)^2 + \dots \right] \sigma^\mu(s, x) \Big|_{s=0} \equiv \exp \left(t \frac{d}{ds} \right) \sigma^\mu(s, x) \Big|_{s=0}\end{aligned}$$

Definitsioon 3.7.11 Vektorvälja X eksponentseerimise all mõistetakse tema voogu:

$$\exp(tX)x^\mu = \sigma^\mu(t, x)$$

Lisa 3 Lie rühmad ja Lie algebrad

Lie rühmad

Selles alapeatükis olgu G n -dimensionaalne diferentseeruv muutkond (üldiselt tähistame muutkonda tähisega M).

Definitsioon 3.7.12 Lie rühmaks nimetatakse sellist muutkonda G , millel on lisaomadusena rühma struktuur, kusjuures järgmised rühma operatsioonid

- (i) $\cdot : G \times G \rightarrow G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$
- (ii) $^{-1} : G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$

on diferentseeruvad (difeomorfismid $G \rightarrow G$) [10].

Näide 3.7.2 Järgnevad on Lie rühmad:

$$(\mathbb{R}^n, +), \quad (\mathbb{R}_+^n, \cdot) \quad \text{GL}(n, \mathbb{R}), \quad \text{O}(n), \quad \text{O}(1,3), \quad \text{SU}(n)$$

Teoreem 3.3 Iga Lie rühma G kinnine alamrühm on Lie alamrühm [10].

3.7.4 Lie rühma toime muutkondadel

Definitsioon 3.7.13 Olgu $p \in M$ meelevaldselt valitud. Lie rühma G toime muutkonnal M on diferentseeruv kujutus $\sigma : G \times M \rightarrow M$, mis rahuldab:

$$(i) \quad \sigma(e, p) = p$$

$$(ii) \quad \sigma(g_1, \sigma(g_2, p)) = \sigma(g_1 g_2, p) \quad \Leftrightarrow \quad g_1(g_2 p) = (g_1 g_2)p.$$

Näide 3.7.3 Definitsiooniga (edaspidi: def) (3.7.9) antud vektorvälja voog on $\mathbb{R}$ toime M -il. Kui voog oleks perioodiline, siis võiks vaadelda $\text{U}(1)$ või $\text{SO}(2)$ toimena. Täpsemalt: Kui on antud perioodiline voog $\sigma(t, x)$ perioodiga T , siis saame konstrueerida uue voo $\bar{\sigma}(\exp(2\pi i t/T), x) \equiv \sigma(t, x)$ struktuurirühmaga $\text{U}(1)$ [10].

Näide 3.7.4 On teada, et $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ toimib Minkowski ruumile M_4 erilisel moel. Olgu M_4 -l antud kaart koordinaatidega $x = (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in M_4$, mille jaoks defineerime Hermiitilise ¹² maatriksi järgmiselt:

$$X(x) \equiv x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Viimases on $\sigma_\mu = (I_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ Pauli maatriksid. Kehtib ka vastupidine: Iga hermiitiline maatriksi X korral leidub ühene vektor $(x^\mu) \in M_4 : x^\mu = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_\mu X)$ [10].

Järeldus 3.7.4 M_4 on isomorfne 2×2 hermiitiliste maatriksite hulgaga. On lihtne kontrollida, et $\det X(x) = -x^\mu x^\mu = -\|x\|^2 = -t^2 + (x)^2 + (y)^2 + (z)^2$ ¹³. Kui defineerida intervalli ruut

$$s = \Delta x^\mu \Delta x^\mu = \|\Delta x\|^2, \text{ siis}$$

¹²Ka enesekaasne maatriks, $A = A^\dagger$.

¹³Minkowski normi ruut vastasmärgiga

$$\begin{aligned}
\det X(x) &> 0 \quad \text{kui } s \text{ on ajasarnane} \\
&= 0 \quad \text{kui } s \text{ on valgusintervall} \\
&< 0 \quad \text{kui } s \text{ on ruumisarnane}
\end{aligned}$$

[10] Olgu $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$. Defineerime $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ toime muutkonnal M_4 :

$$\sigma(A, x) \equiv AX(x)A^\dagger \quad (3.47)$$

Näitame, et see toime rahuldab def (3.7.13) tingimusi:

$$\begin{aligned}
\sigma(E, x) &= EX(x)E^\dagger = X(x) \\
\sigma(A_1, \sigma(A_2, x)) &= \sigma(A_1, A_2 X A_2^\dagger) = A_1 A_2 X A_2^\dagger A_1^\dagger \\
&= \sigma(A_1 A_2, x) = (A_1 A_2) X (A_1 A_2)^\dagger
\end{aligned}$$

Viimase avaldise võib kokkuvõtvalt esitada

$$A(BXB^\dagger)A^\dagger = (AB)X(AB)^\dagger, \quad (3.48)$$

kus kasutasime $(A_1 A_2)^\dagger = A_2^\dagger A_1^\dagger$. Kuna $\det$ on multiplikatiivne operaator ja $\det(A)=1$, siis paneme tähele, et toime 3.7.13 säilitab Minkowski normi:

$$\det \sigma(A, x) = \det[AXA^\dagger] = \det X.$$

Sellest järeldub, et seosega 3.7.13 defineeritud teisendus ei muuda vektori intervalli tüüpi. Pangem tähele, et $\varphi : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{O}(1, 3)$ on seose 3.48 tõttu homomorfism, mis ei ole injektiivne [10]¹⁴. Hakates leidma Pauli maatriksite astmeid, saab tõestada, et kehtib

$$\exp[i\theta(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})] = I \cos \theta + i(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin \theta \quad (3.49)$$

Asendades $\theta \rightarrow -\frac{\theta}{2}$, saadakse pööre ümber ühikvektori $\hat{n}$ nurga $-\frac{\theta}{2}$ võrra ning $\frac{\theta}{2}$ tõttu on $\varphi: \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{O}(3)$ homomorfism 1-1 [10]. Samas $\text{O}(3)$ korral peaksid

¹⁴Võrrelda seose 3.7.13 tulemusi A ja $-A$ korral

pöördes θ ja $2\pi + \theta$ olema samad, kuid saab selgeks, et see nii pole:

$$A(2\pi + \theta) = \exp[-i\frac{2\pi + \theta}{2}(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})] = \exp[-i(\pi + \frac{\theta}{2}(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}))] \quad (3.50)$$

$$= \underbrace{\exp[-i(\pi(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}))]}_{-1} \exp[-i(\frac{\theta}{2}(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}))] = -A(\theta) \quad (3.51)$$

Saab näidata, et φ on pealekujutus Lorentzi rühmale $O_+^\uparrow = \{\Lambda \in O(1, 3) | \det \Lambda = +1, \Lambda_{00} > 0\}$ [10]. Osutub, et $SL(2, \mathbb{C})$ toob esituste ruumi sisse spiinorid (näiteks Diraci väljad esitavad spiinorsuursusi) ja $SL(2, \mathbb{C})$ on rühma $SPIN(1, 3)$ *universal covering* [10].

Olgu järgnevas määratud G toime M -il.

Definitsioon 3.7.14 Punkti $p \in M$ isotroopiarühmaks ¹⁵ nim. G alamrühma, mis on antud sosega

$$H(p) = \{g \in G | \sigma(g, p) = p\}. \quad (3.52)$$

Saab näidata, et isotroopiarühm on iga $p \in M$ korral Lie alamrühm. Kui H on G isotroopiarühm, siis faktorruum on diferentseeruva struktuuriga, täpsemalt diferentseeruv muutkond (homogeenne ruum) [10].

Lemma 3.6 Kui G , $H(p)$ ja M rahuldavad teatavaid lisatingimusi, siis saab näidata, et

$$G/H(p) \stackrel{homeo}{\cong} M \quad (3.53)$$

.

Näide 3.7.5 $O(n + 1)$ mõju $\mathbb{RP}^n$ -le. Kuna $\mathbb{RP}^n$ on (kompaktne) muutkond, siis võib defineerida $O(n + 1)$ vasakpoolse transitiivse ¹⁶ mõju $\mathbb{RP}^n$ -le. Näitame, et $O(n + 1)$ säilitab $\mathbb{R}^{n+1}$ -le mõjude projektiivse ruumi ekvivalentsiseose. Olgu $x, x' \in \mathbb{R}^{n+1}$ ja $g \in O(n + 1)$. Faktist $x \sim x'$ jäeldub $gx \sim gx'$ (piisab võtta $gx' = agx$). Geomeetriliselt: pöörates jääb sihivektoriga seotud paralleelne vektor ikka sihivektoriga paralleelseks. Seega $O(n + 1)$ toime ruumile $\mathbb{R}^{n+1}$ tekitab loomulikult moel toime ruumile $\mathbb{RP}^n$. Ilmselgelt on see toime transitiivne

¹⁵*isotropy group, little group, stabilizer of p*

¹⁶mõju on transitiivne, kui iga $p_1, p_2 \in M$ korral leidub element $g \in G$, et $\sigma(g, p_1) = p_2$

$\mathbb{RP}^n$ -il (vaadata sama normiga esindajaid). Olgu $p \in \mathbb{RP}^n$, mis vastab punktile $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Leiame punkti p isotroopiarühma $H(p)$:

$$H(p) = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & A & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \middle| A \in O(n) \right\} = O(1) \times O(n) \quad (3.54)$$

Viimases on $O(1) \cong \mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$. Lemma (3.6) (võrrelda homomorfismiteoreemiga) kohaselt [10]

$$O(n+1)/[O(1) \times O(n)] \cong S^n/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{RP}^n. \quad (3.55)$$

Lie algebrad

Konteksti mõistmiseks soovitatakse lugejal esmalt teha tutvust lisaga nr 2.

Definitsioon 3.7.15 Vektorruumi W nimetatakse Lie algebraks, kui on antud bilineaarne kujutus, täpsemalt **Lie kommutaator** $[\cdot, \cdot] : W \times W \mapsto W$, mis rahuldab tingimusi:

- $[w_1, w_2] = -[w_2, w_1]$ (antikommutatiivsus)
- $[w_1[w_2, w_3]] + [w_2[w_3, w_1]] + [w_3[w_1, w_2]] = 0$ (Jacobi samasus)

Olgu $a \in G$, $g \in G$. Defineerime elemendi a parempoolse $R_a : G \rightarrow G$ ja vasakpoolse mõju $L_a : G \rightarrow G$ elemendile g järgmiselt:

$$R_a g = ga \quad (3.56)$$

$$L_a g = ag \quad (3.57)$$

Kujutuste R_a ja L_a diferentsiaalid on kujutused $L_{a*} : T_g G \rightarrow T_{ag} G$ ja $R_{a*} : T_g G \rightarrow T_{ga} G$. Järgnevas piirdume ainult vasakpoolse (v.p.) toimega, sest vasakpoolne ja parempoolne (p.p.) toime on analoogilised [10].

Olgu X vektorväli Lie rühmal G .

Definitsioon 3.7.16 Vektorvälja X nimetatakse vasakinvariantseks vektorväljaks, kui

$$L_{g*}(V) = X_V|_g \quad (3.58)$$

Lemma 3.7 Olgu X vasakinvariantne vektorväli. Siis kehtib

$$X^\mu(ag) = X^\nu(g) \frac{\partial x^\mu(ag)}{\partial x^\nu(g)} \quad (3.59)$$

Tõestus: Vektorvälja def põhjal $X^\mu|_{ag} = X^\mu(g) \frac{\partial x^\mu(ag)}{\partial x^\mu(g)}$. Vaatleme avaldise (3.59) vasakut ja paremat poolt. Lähtume sellest, et $L_{a*} = \left(\frac{\partial x^\mu(ag)}{\partial x^\nu(g)} \right)$. Tõepoolest, def (3.7.16) kohaselt avaldub v.p. avaldis ¹⁷ : $L_{a*}X|_g = X^\nu(g) \frac{\partial x^\mu(ag)}{\partial x^\nu(g)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_{ag}$, p.p. aga $X|_{ag} = X^\mu(ag) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_{ag}$, kus $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_{ag}$ on puutujaruumi baas punktis ag . Kuna baasid on võrdsed, siis peavad ka komponendid võrdsed olema, mistõttu $X^\mu(ag) = X^\nu(g) \frac{\partial x^\mu(ag)}{\partial x^\nu(g)}$ ja lemma on tõestatud $\square$

Teoreem 3.4 Kujutus $T_eG \rightarrow \mathfrak{g} : V \mapsto X_V$ on isomorfism. Vasakinvariantsete vektorväljade hulk on vektorruum, mis on isomorfne rühma G ühiku puutujaruumiga T_eG [10].

Tõestus: Tarvilikkus: $V \in T_eG$ määrab ühese vasakinvariantse vektorvälja X_V üle kogu rühma G avaldisega $X_V|_g = L_{g*}V$. Saadakse:

$$X_V|_{ag} = L_{ag*}V = (L_a L_g)_*V = L_{a*}L_{g*}V = L_{a*}(X_V|_g) \quad (3.60)$$

Edaspidi kasutame valemit:

$$X_V|_{ag} = L_{a*}(X_V|_g) \quad (3.61)$$

Piisavus: vasakinvariantne vektorväli X määrab ühese ühiku puutujavektori $V = X|_e \in T_eG$ $\square$

¹⁷vaatleme täisavaldisi, st koos baasiga

Tähistagu $\mathfrak{g}$ vasakinvariantsete vektorväljade hulka rühmal G . Kuna kehtib teoreem (3.4), siis saab vasakinvariantsete vektorväljade hulga $\mathfrak{g}$ matemaatiliselt samastada G ühiku e puutujaruumiga $T_e G$. Kuna vektorväljade jaoks on defineeritud Lie kommutaator ja $\mathfrak{g}$ on (vasakinvariantsete) vektorväljade hulk, siis Lie kommutaator on samuti määratud $\mathfrak{g}$ -l.

Näitame, et $\mathfrak{g}$ on kinnine Lie kommutaatori suhtes. Olgu $g \in G$, $L_a g = ag \in G$, $X, Y \in \mathfrak{g}$. Teatavasti kehtib $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$. Rakendame Lie kommutaatorile $[X, Y]$ kujutust L_{a*} :

$$L_{a*}[X, Y]|_g = [L_{a*}X|_g, L_{a*}Y|_g] = [X, Y]|_{ag}$$

Seega $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ ehk $\mathfrak{g}$ on kinnine Lie kommutaatori suhtes [10].

Lemma 3.8 Vasakinvariantsete vektorväljade hulk $\mathfrak{g}$ koos Lie kommutaatoriga $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ moodustab Lie rühma G **Lie algebra** [10].

Näide 3.7.6 Arvutame rühma $GL(n, \mathbb{R})$ Lie algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Olgu $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ joon ja $c(0) = I_n$ n -järku ühikmaatriks. Lähendame ühiku $s = 0$ ümbruses joont $c(s) = I_n + sA + O(s^2)$, kus A on $n \times n$ reaalse elementidega maatriks. Paneme tähele, et kui $s \rightarrow 0$, siis $\det c(s) \neq 0 \Rightarrow c(s) \in GL(n, \mathbb{R})$. Joone $c(s)$ puutujavektor punktis $s = 0$ on $A \Rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ on $n \times n$ maatriksite hulk. $\dim(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) = n^2 = \dim GL(n, \mathbb{R})$ [10].

Näide 3.7.7 $GL(n, \mathbb{R})$ igal maatriksil on n^2 elementi x^{ij} , $i, j = 1, \dots, n$. Ühik-elementideks on $e = I_n = (\delta^{ij})$. Olgu $g = \{x^{ij}(g)\} \in GL(n, \mathbb{R})$ ja $a = \{x^{ij}(a)\} \in GL(n, \mathbb{R})$. Vasakpoolne mõju on määratud maatriksite korrutamise reegluga $L_a g = ag = \sum x^{ik}(a)x^{kj}(g)$. Valime vabalt ühiku puutujavektori $V = \sum V^{ij} \partial / \partial x^{ij}|_e \in T_e G$, kus V^{ij} on puutujavektori komponendid. [10] Leiame puutujavektori V poolt genereeritud vasakinvariantse vektorvälja:

$$\begin{aligned} X_V|_g &= L_{g*}V = \sum_{ijklm} V^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \Big|_e x^{kl}(g)x^{lm}(e) \frac{\partial}{\partial x^{km}} \Big|_g \\ &= \sum V^{ij} x^{kl}(g) \delta_i^l \delta_j^m \frac{\partial}{\partial x^{km}} \Big|_g \\ &= \sum x^{ki}(g) V^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{kj}} \Big|_g = \sum (gV)^{kj} \frac{\partial}{\partial x^{kj}} \Big|_g \end{aligned} \tag{3.62}$$

Viimases kasutasime korduvalt maatriksite korrutamise reeglit. gV tähistab antud

juhul vektori ja maatriksi korrutist.

Kasutades tähistust $x^{ik}(g) = g$, defineerides lisaks $W = W^{ij}\partial/\partial x^{ij}|_e$ ja leides

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \left(x^{ca}(g) W^{ab} \frac{\partial}{\partial x^{cb}} \Big|_g f \right) &= W^{jb} \frac{\partial f}{\partial x^{ib}}(g) + x^{ca} W^{ab} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{ij} \partial x^{ib}} \\ \sum_{ijk} x^{ik}(g) \underbrace{V^{kj} W^{jb}}_{(VW)^{kb}} \frac{\partial f(g)}{\partial x^{ib}} - \sum_{ijk} x^{ik}(g) \underbrace{W^{kj} V^{jb}}_{(WV)^{kb}} \frac{\partial f(g)}{\partial x^{ib}} &= \sum g[VW - WV]^{ib} \frac{\partial f}{\partial x^{ib}} \Big|_g, \end{aligned}$$

leiame X_V ja X_W Lie kommutaatori:

$$\begin{aligned} [X_V, X_W]f|_g &= \sum x^{ik}(g) V^{kj} \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \Big|_g \left(x^{ca}(g) W^{ab} \frac{\partial}{\partial x^{cb}} \Big|_g f \right) \\ &\quad - \sum x^{ik}(g) W^{kj} \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \Big|_g \left(x^{ca}(g) V^{ab} \frac{\partial}{\partial x^{cb}} \Big|_g f \right) = \sum_{ib} (g[V, W])^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^{ib}} \\ &\quad + \sum_{min} x^{ij} V^{kj} x^{ca}(g) W^{ab} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{ij} \partial x^{cb}} - \sum_{min} x^{ik}(g) W^{kj} x^{ca} V^{ab} \frac{\partial^2 f(g)}{\partial x^{ij} \partial x^{cb}} \end{aligned}$$

Viimased 2 liiget koonduvad, kui teha indeksimuutus $k \leftrightarrow a$, $j \leftrightarrow b$, $i \leftrightarrow c$. Lõpptulemusena saime:

$$[X_V, X_W]|_g = \sum_{ij} (g[V, W])^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}} \Big|_g \quad (3.63)$$

Kuna üldistus meelevaldsele maatriksrühmale on ilmne, siis kehtivad:

$$L_{g*}V = gV \quad [X_V, X_W]|_g = L_{g*}[V, W] = g[V, W] \quad (3.64)$$

3.7.5 Üheparameetriline alamrühm

Algebras on mitmeid kujutuste rühmi - näiteks substituutsioonirühm ja selle alamrühmana märgimuudurühm. Selles jaotises vaatleme analoogiliselt 1-parameetrilist alamrühma, mis moodustab Lie rühmas joone. Tuletame lugejale meelde, et Lie rühm on ühtlasi ka pideva rühma struktuuriga muutkond. Võiks tekkida küsimus - kas võib vaadelda integraaljooni ka Lie rühmal kui muutkonnal? Sellele olulisele küsimusele anname vastuse käesolevas jaotises.

Oluline erinevus difeomorfismide 1-parameetrilise rühma peatükiga seisneb selles, et viimase korral uuriti, kuidas toimib voog (integraaljoonte voog) muutkonnal (parameeter viidi alaindeksisse, et tuleks ilmsiks mõju muutkonna elemendile)¹⁸. Kindla parameetri t väärtuse korral oli toime tulemuseks muutkonna element. Selles peatükis on kindla parameetri t väärtuse korral tulemuseks Lie rühma element.

Vaatleme joont, mille argumendiks on ainult parameeter $t \in \mathbb{R}$.

Definitsioon 3.7.17 Joon $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ on **Lie rühma G 1-parameetriline alamrühm** parajasti siis, kui ta rahuldab järgmist tingimust:

$$\phi(t)\phi(s) = \phi(t + s) \quad (3.65)$$

Osutub, et nii defineeritud joon on tegelikult kujutus, mis on Lie rühmade $\mathbb{R}$ ($+$ suhtes) ja G vaheline homomorfism, st ϕ säilitab Lie rühma struktuuri. Difeomorfismide peatükis näidati, et vektorväli genereerib muutkonnal integraaljoonte voo. Siin uurime, millise voo genereerib vasakinvariantne vektorväli. On selge, et 1-parameetriline alamrühm on Lie rühma kommutatiivne (Abeli) alamrühm. Eeldades, et $\phi(0) = e$ ja $\phi(t)$ pöördelement avaldub kujul $\phi(s)$, leiame $\phi(t)$ pöördkujutuse $\phi(s)$: $\phi(t) \underbrace{(\phi(t))^{-1}}_{=\phi(s)} = \phi(0) \Rightarrow \phi(t + s) = \phi(0) \Rightarrow (\phi(t))^{-1} = \phi(-t)$. 1-parameetrilise alamrühma puhul kehtivad [10]:

- (i) $\phi(0) = e$ ühikelement
- (ii) $(\phi(t))^{-1} = \phi(-t)$ pöördelement
- (iii) $\phi(t)\phi(s) = \phi(t + s) = \phi(s + t) = \phi(s)\phi(t)$ kommutatiivsus

[10] Sarnaselt difeomorfismide peatüki integraaljoontele:

Lemma 3.9 Olgu antud joon Lie rühmal. Kui on antud 1-parameetriline alamrühm ϕ , siis leidub selline vasakinvariantne vektorväli X , et kehtib ¹⁹

$$\frac{d\phi^\mu(t)}{dt} = X^\mu(\phi(t)) \quad (3.66)$$

¹⁸Saadi kommutatiivne rühm, mille korral voo järjest rakendamise korral tuli parameetrid indeksis liita.

¹⁹Võrrelge valemiga 3.45.

Tõestus: Valime $G = \mathbb{R}$, defineerime v.p. toime $t \mapsto t + a$ ja näitame, et $X = d/dt$ määrab vasakinvariantse vektorvälja Lie rühmal G . Kasutades v.p. toimet ja puutujavektorit punktis $t + a$:

$$L_{a*}X \Big|_t = X \Big|_t \circ L_{a*} = \frac{\partial(t+a)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial(t+a)} = \frac{\partial}{\partial(t+a)} = X \Big|_{t+a}$$

Olgu t suvaline reaalarv. Tähistame $\phi(t) := g$. Siis kehtib võrdus:

$$(L_t)_* \frac{d}{dt} \Big|_0 = \frac{d}{dt} \Big|_t. \quad (3.67)$$

Järgnevalt rakendame kujutust $\phi_* : T_t\mathbb{R} \rightarrow T_{\phi(t)}G$:

$$\begin{aligned} \phi_* \frac{d}{dt} \Big|_0 &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \circ \phi^* = \frac{d\phi^\mu(t)}{dt} \Big|_0 \frac{\partial}{\partial g^\mu} \Big|_e = X|_e \\ \phi_* \frac{d}{dt} \Big|_t &= \frac{d}{dt} \Big|_t \circ \phi^* = \frac{d\phi^\mu(t)}{dt} \Big|_t \frac{\partial}{\partial g^\mu} \Big|_g = X|_g \end{aligned} \quad (3.68)$$

Kasutasime fakti, et $\phi(0) = e$. Tulemustest (3.67) ja (3.68) saame:

$$(\phi L_t)_* \frac{d}{dt} \Big|_0 = \phi_* L_{t*} \frac{d}{dt} \Big|_0 = X|_g \quad (3.69)$$

Kuna $\phi L_t(m) = \phi(t+m) = \phi(t)\phi(m) = L_g\phi(m)$, siis ka $\phi_* L_{t*} = L_{g*}\phi_*$, siis seos (3.69) teiseneb:

$$(\phi L_t)_* \frac{d}{dt} \Big|_0 = L_{g*}\phi_* \frac{d}{dt} \Big|_0 = L_{g*}X|_e \quad (3.70)$$

Seega [10]

$$L_{g*}X|_e = X|_g$$
(3.71)

.

□

Järeldus 3.7.5 Iga integraaljoonte voog $\phi(t)$ määrab ²⁰ vasakinvariantse vektorvälja $X \in \mathfrak{g}$ üheselt.

²⁰ ing. k. *associated vector field*

Saab näidata ka vastupidise, st iga vasakinvariantne vektorväli $X \in \mathfrak{g}$ määrab difeomorfismide 1-parameetrilise rühma $\sigma(t, g)$ nii, et $\frac{d\sigma}{dt} = X$ ja $\sigma(0, g) = g$. Defineerides $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ $\phi(t) \equiv \sigma(t, e)$, muutub joon $\phi(t)$ rühma G 1-parameetriliseks alamrühmaks.²¹

Järeldus 3.7.6 Lie rühma G 1-parameetrilise alamrühmade ja vasakinvariantsete vektorväljade vahel on üksühene vastavus.

Definitsioon 3.7.18 Olgu G Lie rühm ja $V \in T_e G$. $\exp: T_e G \rightarrow G$ on defineeritud $\exp V \equiv \phi_V(1)$. ϕ_V on G 1-p. alamrühma poolt genereeritud vasakinvariantne vektorväli $X_V|_g = L_{g*}V$. [10]

$\exp$ on eksponent**kujutus**, tegemist on eksponentfunktsiooni üldistusega.

Põhjendus:

$\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ korral osutub kujutus $\exp$ „tavaliseks“ eksponentfunktsiooniks, $GL_n(\mathbb{R})$ korral aga kvantmehaanikast tuntud maatriksite eksponendiks. ($\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ koos kommutaatoriga on $GL_n(\mathbb{R})$ Lie algebra). $\exp$ kujutab Lie algebra Lie rühma “sisse”. See difeomorfism kujutab $\mathfrak{g}$ 0-elementi Lie rühma ühikelemendiks e . Kuna eksponentkujutus on pealekujutus Lie rühma ühiku e mingile ümbrusele ε , siis on tavaks nimetada Lie algebra elemente Lie rühma **G lõpmata väikesteks moodustajateks** (*infinitesimal generators*). Selle pealekujutusega tekib Lie rühma G 1-parameetriline alamrühm. Eksponentkujutus ja Lie algebra määravad iga sidusa Lie rühma lokaalse struktuuri [7].

Teoreem 3.5 Olgu $V \in T_e G$ ja²² $t \in \mathbb{R}$. Siis kehtib:

$$\exp(tV) = \phi_V(t) \quad (3.72)$$

Tõestuse leiab raamatust [10] pärast definitsiooni (5.13).

3.7.6 Lie algebra baas

Olgu $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ühikupuutuja vektorruumi $T_e G$ baas - see koosneb $n = \dim G$ vektorist. Baas määrab iga $g \in G$ korral n lin sõltumatut vasakinvariantset vektorvälja $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ järgmiselt: $X_\mu|_g = L_{g*}V_\mu$. Pangem tähele, et $\{X_\mu\}$ on baas üle terve G . Kuna $[X_\mu, X_\nu]|_g$ on samuti $\mathfrak{g}$ element punktis g , siis saame

²¹tõestuse leiab Nakahara raamatust peatükist (5.6.3)

²²vt $\phi_V(t)$ def eestpoolt

kommutaatori avaldada:

$$[X_\mu, X_\nu] = c_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda \quad (3.73)$$

Arve $c_{\mu\nu}^\lambda$ nim **struktuurikonstantideks**. Kui G on maatriksrühm, siis punktis $g = e$ on viimase seose vasak pool (v.p.) maatriksite V_μ ja V_ν kommutaator.

Lemma 3.10 $c_{\mu\nu}^\lambda$ on sõltumatud Lie rühma elemendist g [10].

Tõsisema huvi korral palun sirvida raamatu [10] jaotist (5.6.4).

3.7.7 Struktuurikonstandid ja Lie algebrate näiteid

Tuletame meelde, et struktuurikonstantideks $\varepsilon_i \varepsilon_j = (c_{ij}^1; \dots; c_{ij}^n) = c_{ij}^k \varepsilon_k$ nim algebra baasivektorite korrutiste koordinaate [12]. Kui Lie algebra dimensioon on n , siis on võimalik valida n lineaarselt sõltumatut vektorit (baas), mille kaudu saab avaldada mistahes Lie algebra elemendi. Nimetame need baasvektoreteks $X_1, X_2, \dots, X_n$. Kuna Lie algebra on kommutaatori suhtes kinnine, siis saab iga kahe baasivektori kommutaatori avaldada baasivektorite lineaarkombinatsioonina:

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k \quad (3.74)$$

Arve C_{ij}^k nimetatakse Lie' rühma G struktuurikonstantideks. Lie algebra struktuur on täielikult määratud ta struktuurikonstantidega [5]. Kommutaatori antisümmeetria indutseerib vastava struktuurikonstantide antisümmeetria [12]:

$$[X_i, X_j] + [X_j, X_i] = C_{ij}^k X_k + C_{ji}^k X_k = 0 \Rightarrow C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0 \quad (3.75)$$

Näide 3.7.8 Uurime $\text{SL}(2; \mathbb{R})$ Lie algebrat. Olgu $m : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \text{SL}(n, \mathbb{R})$ joon ja $m(0) = I_2$.

$$\begin{aligned} 1 &= \det(m(s)) = \det(\exp sA) = \exp(\text{Tr}(sA)) = [(\text{Tr}(sA))^N]/N! \approx 1 + \text{Tr}(sA) = \\ &= 1 + s\text{Tr}(A) = 1 + s\text{Tr}(A) \implies \mathfrak{sl}(2; \mathbb{R}) = \{A | \text{Tr}(A) = 0\} \end{aligned}$$

Lineariseerides Lie rühma $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ ühiku ümbruses ehk uurides ühiku puutuja-

ruumi [5]:

$$\begin{aligned}(a, b, c) \longrightarrow m(a, b, c) &= \begin{bmatrix} 1+a & b \\ c & \frac{1+bc}{1+a} \end{bmatrix} \xrightarrow[1/(1+a) \text{ Taylori r.}]{1.\text{j. LVS}} \begin{bmatrix} 1+a & b \\ c & 1-a \end{bmatrix} = \\ &= I_2 + \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Viimase maatriksi jälg on tõepoolest 0. Uurime ühiku puutujaruumi, lubades parameetrid (a, b, c) muutuda lõpmata väikesteks. Arendame 1. järku lõpmata väikeste suuruste järgi:

$$\begin{aligned}(a, b, c) \longrightarrow (\delta a, \delta b, \delta c) \longrightarrow m(\delta a, \delta b, \delta c) &= \begin{bmatrix} 1+\delta a & \delta b \\ \delta c & \frac{1+\delta b \delta c}{1+\delta a} \end{bmatrix} \\ \xrightarrow[1/(1+a) \text{ Taylori r.}]{1.\text{j. LVS}} \begin{bmatrix} 1+\delta a & \delta b \\ \delta c & 1-\delta a \end{bmatrix} &= I_2 + \delta a X_a + \delta b X_b + \delta c X_c = \\ &= I_2 + \delta a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \delta b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \delta c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Lie algebra baasivektorid on 1. järku lõpmata väikesed suurused. Praegusel juhul on baasivektorid 2×2 maatriksid. On lihtne veenduda, et kehtivad järgmised kommutatsiooniseosed, kusjuures strukt. konstandid on vastavalt 2, -2 ja 1 [5]:

$$[X_a, X_b] = 2X_b \quad (3.76)$$

$$[X_a, X_c] = -2X_c \quad (3.77)$$

$$[X_b, X_c] = X_a \quad (3.78)$$

Konstrueerime $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ regulaarse esituse [5]:

$$R(X) = aR(X_a) + bR(X_b) + cR(X_c) = \begin{bmatrix} 0 & -2b & 2c \\ -c & 2a & 0 \\ b & 0 & -2a \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Näide 3.7.9 Kuna Lie algebra $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ on eelnevalt välja arvutatud, siis on ilmne üldistus $\mathfrak{sl}(n; \mathbb{C})$. Kuna $SU(n)$ on poollihne kompaktne Lie rühm ja $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$, siis ka $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{sl}(n) \cap \mathfrak{u}(n)$, seega

$$\mathfrak{u}(n) = \{A | A^\dagger = -A\} \quad (3.80)$$

$$\mathfrak{su}(n) = \{A | A^\dagger = -A, \text{Tr}(A) = 0\} \quad (3.81)$$

Järeldus 3.7.7 Rühma $SU(n)$ Lie algebra $\mathfrak{su}(n)$ elemendid on antihermiitilised maatriksid, millel jälg on 0 [10].

Praktikas otsitakse enamasti baasi, mille korral taanduks iga Lie algebra element samaaegselt ühele järgmistest: mittepoollihne, poollihne või lihtne Lie algebra [5].

Diferentsiaalvormid

Järgnevalt tehakse lühikokkuvõtte vajalikest diferentsiaalvormidega seotud mõistetest. Tõsisema huvi korral soovitatakse lugejal uurida raamatut [3]. Olgu järgnevas $\Omega^r(M)$ siledate r -vormide ruum. Muutkonna M iga punkti p korral on $\Omega_p^r(M)$ vektorruumide tensorkorrutise $T_p^*(M) \otimes \cdots \otimes T_p^*M$ alamruum.²³

Definitsioon 3.7.19 r -järku diferentsiaalvorm on $(0, r)$ -antisümmeetriline tensor.

Defineerime iga $(0, r)$ -tüüpi tensori jaoks operaatori Alt
Alt: $(\text{Alt}T)_{\mu_1 \dots \mu_r} = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) T_{\mu_{\sigma(1)} \dots \mu_{\sigma(r)}}$ Kuna kahe antisümmeetrilise tensori tensorkorrutis ei ole antisümm., defineerime antisümm.²⁴ tensorkorrutise $\wedge$.

Definitsioon 3.7.20 Vormide $dx^{\mu_1}, dx^{\mu_2}, \dots, dx^{\mu_r}$ väliskorrutis avaldub [3]:

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r} = \frac{1}{r!} \text{Alt}(dx^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\mu_r}) \quad (3.82)$$

Definitsioon 3.7.21 Välisdiferentsiaal d on kujutus $\Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$, mis

²³Ruumid TM ja T^*M koosnevad vastavalt vektoritest ja kovektoritest kõigis punktides ja ei ole enam vektorruumid, vaid kihtkonnad. On ilmne, et kahe erineva vektorruumi vektorite summa ei pruugi kuuluda mittekumbagi vektorruumi.

²⁴Kuna $\text{Alt}(\omega \wedge \pi) = \omega \wedge \pi$, siis $(\omega \wedge \pi)$ on antisümm. [12]

toimib r -vormile $\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ järgmiselt:

$$d\omega = \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (3.83)$$

Kehtivad avaldised:

$$\begin{aligned} df^*\omega &= f^*(d\omega) \\ \text{ehk } d^2 &= 0, \\ d(\lambda \wedge \mu) &= d\lambda \wedge \mu + (-1)^{\deg \lambda} \lambda \wedge d\mu \end{aligned} \quad (3.84)$$

kus $\deg \lambda$ on vormi λ **järk** [3]. Olgu välisdiferentsiaali kujutis $\text{Im } d$ ja tuum $\text{Ker } d$.

Definitsioon 3.7.22 Diferentsiaalvormi β nim **kinniseks**, kui $d\beta=0$

Definitsioon 3.7.23 Diferentsiaalvormi α nim **eksaktseks**, kui leidub selline vorm β , et $\alpha = d\beta$.

Järeldus 3.7.8 Eksaktne vorm α on d kujutiseks, st $\text{Im } d = \alpha$. Kinnine vorm β on d tuumaks, st $\text{Ker } d = \beta$. Iga eksaktne vorm α on ka kinnine, sest kui leidub selline β , et $\alpha = d\beta$, siis $d\alpha = 0$, sest $d^2 = 0$ [3].

Kas kehtib ka vastupidine?

Lemma 3.11 Poincaré lemma. Iga kinnine diferentsiaalvorm on **lokaalselt** eksaktne. Kui $\theta \in \Omega^k(M)$, $k > 0$, on sile k -diferentsiaalvorm, siis leiduvad selline sile $(k-1)$ -diferentsiaalvorm $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ ja punkti p ümbrus U nii, et igas punktis $p \in U$ kehtib $\theta|_p = (d\omega)|_p$ [1].

Lisa 3 Kihtkonnad

Definitsioonid ja mõisted

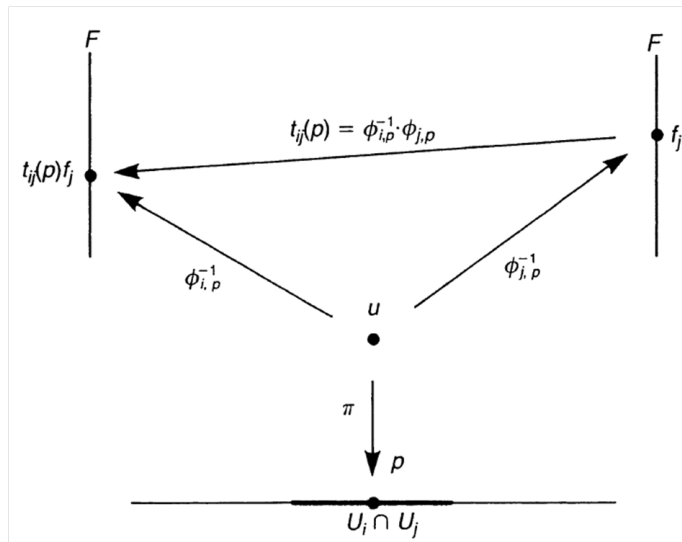
Definitsioon 3.7.24 (Diferentseeruv) kihtkond (E, π, M, F, G) on struktuur, mis koosneb järgmises tabelis antud osadest:

Kihtkonna struktuur

Tabel 3.1: Kihtkonna struktuur

Tähis	Mõiste, seos teiste komponentidega
E	Kihtkonnaruum (<i>total space, bundle space</i>), kihtkonda tähistatakse tihti $E \xrightarrow{\pi} M$
M	Baasmuutkond , baasruum (<i>base space</i>)
$\pi : E \rightarrow M$	Projektsioon (projection).
F	Kihiruum (<i>fibre, typical fibre</i>). Kiht punktis on seotud projektsiooniga: $\pi^{-1}(p) = F_p \simeq F$
G	Struktuurirühm . Võib olla Lie rühm, kuid mitte ilmtin- gimata. On defineeritud G toime kihile F_p vasakult.
$\{U_i\}$	Baasmuutkonna M lahtine kate
$\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$	Lokaalne trivialisatsioon . Omadus: $\pi \circ \phi_i(p, f) = p$. Ni- metuse põhjus: ϕ^{-1} on pealekujutus hulgale $U_i \times F$.
t_{ij}	Üleminekufunktsioonid , $\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)f)$

Üleminekufunktsioonid



Joonis 3.5: Ühisosal $U_i \cap U_j$ on $f_i, f_j \in F$ määratud $u \in \pi^{-1}(p), p \in U_i \cap U_j$ -ga. f_i ja f_j vaheline seos: $f_i = t_{ij}(p)f_j$.

Kihtkonna osade lahtimõtestamine

Järgnevalt selgitatakse kihtkondade teooria mõningaid aspekte. $\pi^{-1}(U_i)$ on otsekorutus, mis on difeomorfne $U_i \times F$ -ga. Difeomorfismiks on $\phi_i^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$. Kui $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, siis on ühisosal defineeritud kaks lokaalset trivialisatsiooni ϕ_i ja ϕ_j . Valides punkti u nii, et $\pi(u) = p \in U_i \cap U_j$, saame ühelt poolt $\phi_i^{-1}(u) = (p, f_i)$ ja teisalt $\phi_j^{-1}(u) = (p, f_j)$. Leidub kujutus $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$, et $f_i = t_{ij}(p)f_j$ (vt joon. (3.5)) [10].

Lemma 3.12 Et kihtkonna lokaalseid “osi” saaks kokku kleepida, peavad üleminekufunktsioonid rahuldama kooskõlatingimusi:

- (i) $t_{ii} = \text{id}_G$ ($p \in U_i$)
- (ii) $t_{ij}(p) = [t_{ji}(p)]^{-1}$ ($p \in U_i \cap U_j$)
- (iii) $t_{ij}(p) \cdot t_{jk}(p) = t_{ik}(p)$ ($p \in U_i \cap U_j \cap U_k$) **kotsükli tingimus** [9]

Kui need tingimused ei ole täidetud, ei ole võimalik kihtkonna lokaalseid “osi” kokku kleepida [10].

Definitsioon 3.7.25 Kui kõik üleminekufunktsioonid on samasuskujutused, siis seda kihtkonda nimetatakse **triviaalseks kihtkonnaks**. Triviaalne kihtkond avaldub baasmuutkonna ja kihiruumi otsekorrutisena: $P = M \times F$ [10].

Olgu antud kihtkond $E \xrightarrow{\pi} M$. Pangem tähele, et võimalike üleminekufunktsioonide hulk pole üheselt määratud. Olgu $\{U_i\}$ baasmuutkonna M lahtine kate, $\{\phi_i\}$ ja $\{\tilde{\phi}_i\}$ kihtkonda kirjeldavad üleminekufunktsioonide pered. üleminekufunktsioonid vastavatel trivialisatsioonide peredel on

$$t_{ij}(p) = \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p} \quad (3.85)$$

$$\tilde{t}_{ij}(p) = \tilde{\phi}_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p}. \quad (3.86)$$

Defineerime igas punktis $p \in M$ kujutuse, täpsemalt Lie rühma kuuluva homöomorfismi $g_i(p) : F \rightarrow F$

$$g_i(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{i,p} \quad (3.87)$$

Eeltest võrdustest on lihtne näha, et

$$\tilde{t}_{ij}(p) = [g_i(p)]^{-1} \circ t_{ij}(p) \circ g_j(p) \quad (3.88)$$

Triviaalse kihtkonna korral on üleminekufunktsioonid samasuskujutused, siis [10]

$$t_{ij}(p) = [g_i(p)]^{-1} g_j(p)$$

.

Definitsioon 3.7.26 Lõige $s : M \rightarrow E$ on sile kujutus, mis rahuldab

(i) $\pi \circ s = \text{id}_M$.

(ii) **lokaalne lõige** $s_i : U_i \rightarrow E$ on defineeritud igal hulgal $U_i \subset M$ [10].

Lisa 4 Maxwelli võrrandid

Yang-Millsi teooria üks praktikas kasutatavamaid lihtsustusi on Maxwelli võrrandid. On tähtis aru saada, et viimased siiski ei määra füüsikalise süsteemi

käitumist üheselt. Kui aga täiendada neid Lorentzi seadusega, st vaadeldes juba Lorentz-Maxwelli võrrandeid, siis on vaadeldav füüsikaline täielikult määratud. Kui on antud laengute, voolude ja väljade algjaotus, siis sidudes muu hulgas Faraday tensori (potentsiaalid) ja osakeste kiirenduse EM-väljas, määravad Maxwell-Lorentzi võrrandid süsteemi füüsikalise jaotuse järgnevatel ajahetkedel. Vaatleme ruumi $\Omega^3(M_4)$, mida nimetame 3-diferentsiaalvormide mooduliks üle M_4 (M_4 on Minkowski aegruum meetrikaga η). On teada, et

$$\dim \Omega^3(M_4) = \binom{4}{3} = 4, \quad (3.89)$$

seega moodustavad mooduli baasi 3-vormide väliskorrutised, mida on kokku 4. Valime baasivektorid nii:

$$dt \wedge dx \wedge dy, \quad dt \wedge dy \wedge dz, \quad dt \wedge dz \wedge dx, \quad dx \wedge dy \wedge dz. \quad (3.90)$$

Olgu ühes inertsiaalsüsteemis mõõdetud elektromagnetvälja iseloomustavad suurused $\vec{E}$ ja $\vec{B}$. Eksperiment kinnitab, et $\vec{E}$ ka $\vec{B}$ komponendid teisenevad teise inertsiaalsüsteemi tensoriteisenduse eeskirja järgi: $\bar{F}_{\mu\nu} = F_{\sigma\tau} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^\nu}$. Moodustame *elektromagnetvälja tugevuse 2-diferentsiaalvormi* [1]:

$$F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (\mu < \nu),$$

kus kordajad $F_{\mu\nu}$ on EM-välja tugevuse komponendid, nad rahuldavad Maxwelli võrrandeid. Arvutame 2-vormi F välisdiferentsiaali dF . Saadakse järgmine 3-diferentsiaalvorm:

$$dF = dF_{\mu\nu} \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} dx^\sigma \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (\mu < \nu). \quad (3.91)$$

Leiame baasi (3.90) baasivektorite $dx \wedge dy \wedge dz$ kordajad. Tähistades $t = 0, x = 1, y = 2, z = 3$, saame tingimust $\mu < \nu$ silmas pidades võimalikeks $\sigma - \mu - \nu$ kombinatsioonideks 1-2-3, 3-1-2 ja 2-1-3 ja seetõttu vastav liige avaldub

$$(\underbrace{\partial_1 F_{23}}_{\partial_x B_x} + \underbrace{\partial_3 F_{12}}_{\partial_z B_z} - \underbrace{\partial_2 F_{13}}_{-\partial_y B_y}) dx \wedge dy \wedge dz) \text{ On selge, et äsja arvutati } \text{div} \vec{B}.$$

On lihtne näidata, et ülejäänud kordajaid arvutades saame $\text{rot} \vec{E}$ ja $\partial_t \vec{B}$. Kuna

Maxwelli võrrandi järgi $\text{rot } \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$, siis saame kokkuvõtvalt lokaalselt $\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} = 0$ või globaalselt [1]:

$$dF = 0 \text{ Maxwelli võrrand} \quad (3.92)$$

Järeldus 3.7.9 Elektromagnetväljatugevus 2-vorm F on **kinnine** diferentsiaalvorm.

Tekib küsimus: kas F on kinnine sellepärast, et ta on eksaktne? Kas leidub 1-vorm $\omega \in \Omega^1(U)$, et $F = d\omega$? Teame, et 2-vorm $F \in \Omega^2(U)$, kus $U \subset M_4$. Osutub, et kui de Rhami kohomoloogiarühm $H^2(U)$ on triviaalne, siis leidub $\omega \in \Omega^1(U)$, et $F = d\omega$. Olgu $\omega = A_\mu dx^\mu$.

$$F = d\omega = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (\mu < \nu) \quad (3.93)$$

Definitsioon 3.7.27 Diferentsiaalvormi ω kordajaid A_μ nim. elektromagnetvälja potentsiaalideks.

Olgu järgnevas F sile k -diferentsiaalvorm muutkonnal M meetrikaga $(g^{\mu\nu})$.

Definitsioon 3.7.28 Diferentsiaalvormi F **duaalseks vormiks** nim $(m-k)$ -diferentsiaalvormi $*F$, mille komponendid muutkonna atlase igas kaardis (lokaalsete koordinaatidega $x_1, x_2, \dots, x_m$) määratakse valemiga

$$\begin{aligned} (*F)_{j_1 j_2 \dots j_{m-k}} &= \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_k j_1 j_2 \dots j_{m-k}} g^{i_1 l_1} \dots g^{i_k l_k} F_{l_1 l_2 \dots l_k} \\ &= F^{i_1 i_2 \dots i_k} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_k j_1 j_2 \dots j_{m-k}}, \end{aligned} \quad (3.94)$$

kus $F^{i_1 i_2 \dots i_k} = g^{i_1 l_1} \dots g^{i_k l_k} F_{l_1 l_2 \dots l_k}$, (indeksite tõstmine)

$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_m}$ on Levi-Civita tensor ja $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{m-k} \leq m$ [1]. Operaatorit $*$ nim **Hodge'i täheoperaatoriks** [3].

Olgu $*F = (*F)_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$. Arvutame:

$$(*F)_{01} = \epsilon_{2301} \eta^{22} \eta^{33} F_{23} = F_{23} = B_x,$$

Ülejäänud komponendid arvutatakse analoogiliselt. Saadakse

$$\begin{aligned} *F &= B_x dt \wedge dx + B_y dt \wedge dy + B_z dt \wedge dz \\ &+ E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Definitsioon 3.7.29 Vektori $\vec{E}$ dif. vormiks nim vormi, mis on defineeritud

$$\omega_{\vec{E}}^1 = \vec{E} \cdot d\vec{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (3.96)$$

ja pseudovektori $\vec{B}$ diferentsiaalvormiks vormi

$$\omega_{\vec{B}}^2 = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy. \quad (3.97)$$

Kasutades elektrivälja ja magnetvälja vektorvälju, saab kirjutada [1]

$$F = \omega_{\vec{E}}^1 \wedge dt + \omega_{\vec{B}}^2, \quad *F = -\omega_{\vec{B}}^1 \wedge dt + \omega_{\vec{E}}^2.$$

Definitsioon 3.7.30 2-diferentsiaalvormi F nim *ASD*-diferentsiaalvormiks (*anti-self-dual differential 2-form*), kui ta rahuldab tingimust $*F = -F$.

Arvutades $*dF$, saadakse Maxwelli võrrandeid kasutades

$$d * F = -\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \wedge dt + \rho \cdot dV. \quad (3.98)$$

Moodustame 1-vormi $J = J_\mu dx^\mu = -\rho dt + j_x dx + j_y dy + j_z dz$. Saab näidata, et selle vormi duaalne vorm on $*J = -\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \wedge dt + \rho \cdot dV$. Võrdsustades viimased avaldised, saadakse [1]

$$d(*F) = *J. \quad (3.99)$$

Oleme saanud

$$dF = 0, \quad d(*F) = *J \quad \text{Maxwelli võrrandid dif.vormide esituses} \quad (3.100)$$

Viimaseid nim ka Maxwelli võrrandite geomeetriliseks kujuks. Vaakumis, kus

laengud ja voolud puuduvad ($J \equiv 0$), saadakse

$$dF = 0, \quad d(*F) = 0 \quad (3.101)$$

[1].

Lisa 5 Faraday tensori seos Lorenzi kalibratsiooniga

Seame eesmärgiks leida liikme $\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ seose vaba välja lagranžiaaniga [8]. Arvutame:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} &= \frac{1}{4}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) \\ &= \frac{1}{4}(\partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta - \partial_\beta A_\alpha \partial^\alpha A^\beta - \partial_\alpha A_\beta \partial^\beta A^\alpha + \partial_\beta A_\alpha \partial^\beta A^\alpha) = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta - \partial_\alpha A_\beta \partial^\beta A^\alpha) \\ &= \frac{1}{2}\partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta - \frac{1}{2}(\partial^\alpha A_\alpha)^2 - \frac{1}{2}\partial_\beta(A_\alpha \partial^\alpha A^\beta - A^\beta \partial^\alpha A_\alpha) \end{aligned} \quad (3.102)$$

4-divergents $\partial_\beta(A_\alpha \partial^\alpha A^\beta - A^\beta \partial^\alpha A_\alpha)$ Euler-Lagrange'i võrrandeid ei muuda. On selge, et liige $\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ lihtsustub Lorenzi kalibratsioonis liikmeks $\frac{1}{2}\partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta$. Seega vaba välja lagranžiaan (vt seost 1.1) on seotud liikmega $\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ Lorenzi kalibratsiooni kaudu [8].