0.1 Mänguteooria

0.1.1 Mõisted ja terminid

Olgu mängijaid kokku n. Olgu

- $S_i = \{$ kõikvõimalikud strateegiad mängija i jaoks $\}$

Strateegiate kombinatsioon ehk strateegiate profiil $S = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, mis on mängu mingi realisatsioon – üks strateegia iga mängija jaoks

-
- $U_i(S)$ kasu i-ndale mängijale strateegiate profiilis S
- s_i on (tugevalt, nõrgalt – olenevalt kas range või mitterange võrratus) **dominantne strateegia**, kui ta (tugevalt, nõrgalt) domineerib iga $s_i' \in S_i$ üle. St (teiste mängijate) fikseeritud strateegiate korral on dominantne strateegia valitud mängija jaoks võimalikest strateegiatest kasutoovaim. Matemaatiliselt:

  $$\forall s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n,$$
  $$U_i(s_1, \ldots, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) > U_i(s_1, \ldots, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

- **Tasakaal läbi dominantse strateegia**

  Definitsioon 0.1.1. *Hulk* $\mathrm{Eq}_{\mathrm{dom}}$ – ***Tasakaaluasend läbi dominantsete strateegiate*** *(dominant strategy equilibrium) on iga mängija* i ***dominantsetest stateegiatest*** s_i ***koosnev hulk****, st.* $\mathrm{Eq}_{\mathrm{dom}} = \{(s_{1,dom}, \ldots s_{n,dom})\}$.

  - see tähendab seda, et s_i on mängija i jaoks parim strateegia, nii iga mängija korral – mängija ei saa teiste mängijate fikseeritud strateegiate korral enda strateegiat ühepoolselt parandada.

- Puhtad ja segastrateegiad
  - **Puhas strateegia** – valitakse kindel strateegia ja mängitakse selle järgi. Iga rida või veerg tasuvusmaatriks esitab tegevust ehk puhast strateegiat.
  - **Segastrateegia:** Varieerida võimalikke valikuid vastavalt mingile tõenäosusjaotusele

    - ∗ Olgu A_i = {kõikvõimalikud puhtad strateegiad mängija i jaoks} ja olgu $a_i \in A_i$ mingi puhas strateegia
    - ∗ $s_i(a_j)$ tõenäosus, et puhas strateegia satub segastrateegias s_i valituks
  - i-nda mängija dominantse strateegia s_i tugiosa:
    - ∗ tugiosa(s_i) = { puhtad strateegiad A_i-s, millel on s_i argumendina positiivne tõenäosus } – st sellised puhtad strateegiad, mis osalevad kindlas dominantses strateegias reaalsele elule vastavate tõenäosustega
  - **Täielik segastrateegia: igal strateegial on positiivne tõenäosus**, siis tugiosa(s_i) = A_i.

- **Tasuvusmaatriks annab tasuvused ainult puhta-strateegia profiilide $\mathbf{A_i}$ jaoks**
- Tasuvusmaatriksi üldistus – **(expected utility – kasu keskväärtus)**
  - Olgu $S = (s_1, \dots, s_n)$ segastrateegiate profiil
    - ∗ Iga puhta strateegia realisatsiooni $(a_1, \dots, a_n)$ jaoks moodustada ta kasu ja tõenäosus korrutis $U_i(a_1, \dots, a_n)s_1(a_1)s_2(a_2)\dots s_n(a_n)$
  - **kasu keskväärtus (expected utility)** i-nda mängija jaoks on

$$U_i(s_1, \dots, s_n) = \sum_{(a_1,\dots,a_n)\in \mathbf{A}} U_i(a_1, \dots, a_n)s_1(a_1)s_2(a_2)\dots s_n(a_n) \tag{1}$$

- Kui $S = (s_1, \dots, s_n)$ on (Sega)strateegiate profiil, siis $S_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ strateegiateprofiil ilma i-nda mängija strateegiata
- Kui s'_i i-nda mängija suvaline strateegia, siis
  - $(s'_i, S_{-i}) = (s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$, siit ka nt $(s_i, S_{-i}) = S$.
- s_i on parim reaktsioon (*parim koste*) S_{-i}-le, kui $U_i(s_i, S_{-i}) \geq U_i(s'_i, S_{-i})$ iga mängijale i võimaliku strateegia s'_i korral (s_i on **üheselt** parim reaktsioon, kui võrratus on range)

0.1.2 Nashi tasakaal

Strateegiateprofiil $S = (s_1, \dots, s_n)$ vastab Nashi tasakaalupunktile, kui s_i on parim koste S_{-i}-le iga indeksi i korral.

Teoreem 0.1.1. ***Nashi teoreem*** *Iga lõplike arvu mängijate ja puhaste strateegiatega mängul on minimaalselt 1 Nashi tasakaalupunkt*

Omadus 0.1. *Dominantse strateegia tasakaal(upunkt) on alati ka Nashi tasakaal(upunkt)*

0.1.3 Pareto-optimaalsus

(Sega)strateegiaprofiil S **Pareto-domineerib** strateegiaprofiili S', kui

- Mitte ükski mängija ei saa S-iga väiksemat kasu kui S'-iga, st $U_i(S) \geq U_i(S')$ iga i (ehk iga strateegia) jaoks
- Vähemalt üks mängijatest saab S-iga suurema kasu kui S'-iga, st $U_i(S) > U_i(S')$ vähemalt ühe i korral.

Strateegiaprofiili Pareto-optimaalsus

Teoreem 0.1.2. ***Strateegia s on Pareto-optimaalne*** *kui ei leidu sellist strateegiat s', mis Pareto-domineeriks strateegiat s.*

- *Igal mängul on vähemalt 1 Pareto-optimaalne profiil*
- *Igal mängul on vähemalt üks puhata-strateegia Pareto-optimaalne profiil*

Mees / Naine	Teater	Jalgpall
Teater	2, 1	0, 0
Jalgpall	0, 0	1, 2

Näide 0.1.1. *Selles näites olgu 1. mängija parim reaktsioon S_{-1} selline, mille tugiosas on minimaalselt 2 puhast strateegiat ja sama 2. mängijale. Üldiselt arvutatakse kasu keskväärtus mingile segastrateegia profiilile ehk realisatsioonile $S = (s_1, \dots s_n)$. Leiame parima reaktsiooni $\forall$ i-nda mängija tugiosast $U_i(a_i, S_{-i}) \geq U_i(a_i', S_{-i})$. Kui $S = (a_1, a_2)$ on parim strateegia, siis kasutades, et strateegiaprofiili võib avaldada $S = (a_1, S_{-1}) = (a_2, S_{-2})$, peab a_1 kui a_2 jaoks $U_i(a_1, S_{-i})$ olema sama suur, st $U_1(a_1, S_{-1}) = U_2(a_2, S_{-2})$, arv ei saa olla ju iseendast suurem.*

Järeldus 0.1.1. *Iga üksiku mängija kasu keskväärtused on võrdsed segastrateegia profiili (puhaste strateegiate segu) korral, mille tugiosa koosneb minimaalselt kõigist puhastest* *strateegiatest. Kuna ei leidu suuremat kasu keskväärtust vaadeldavatest, siis on need lihtstrateegiad parimad reaktsioonid ja nende profiil samuti parima reaktsiooniga profiil.*

Näide 0.1.2. *Asume nüüd sugupoolte vastasseisu näite juurde. Eelnevast lähtuvalt peavad iga mängija segastrateegiate kasud parimate reaktsioonide korral olema võrdsed. Oletame, et mõlemad mängijad varieerivad oma strateegiaid sarnaselt - st mõlemal mängijal olgu sama analoogilise sisuga (sümmeetriline) segastrateegia. Olgu mehe segastrateegia* s_{mees}*, st vastavad tõenäosused*

$$\begin{cases} s_{mees}(teater) = p \\ s_{mees}(jalgpall) = 1 - p \end{cases} \tag{2}$$

Segastrateegiate keskmised kasud

Teades, millise tõnäosusega mees naisega mingile tegevusele kaasa tuleb, saame leida naise ***segastrateegia kasude keskväärtused****, kasutades valemit (1):*

$$\text{Naise kasu keskväärtus olekus 'teater':} \quad U_{naine}(jalgpall\ , s_{mees}) = 0 \cdot 1 \cdot p + 1 \cdot 1 \cdot (1-p) = 1 - p$$
$$\text{Naise kasu keskväärtus olekus 'jalgpall':} \quad U_{naine}(teater, s_{mees}) = 2 \cdot 1 \cdot p + 1 \cdot 1 \cdot (1-p) = 2p$$

Nagu eespool seletatud, siis kasude keskväärtused peavad olema võrdsed, seega $1 - p = 2p$ *ehk* $p = 1/3$*, seega mehe segastrateegia (2) tõenäosuste süsteem omandab kuju*

$$\begin{cases} s_{mees}(teater) = 1/3 \\ s_{mees}(jalgpall) = 2/3 \end{cases}$$

Analoogiliselt kui naine läheb jalgpalli vaatama sama tõenäosusega, mis mees teatrissegi, siis

$$\begin{cases} s_{naine}(jalgpall) = p \\ s_{naine}(teater) = 1 - p \end{cases} \tag{3}$$

$$\text{Mehe kasu keskväärtus olekus 'teater':} \quad U_{mees}(teater, s_{naine}) = 1(1-p) + 0 \cdot p = 1 - p$$
$$\text{Mehe kasu keskväärtus olekus 'jalgpall':} \quad U_{mees}(jalgpall, s_{naine}) = 0 \cdot (1-p) + 2 \cdot p = 2p$$

ja nende võrdsusest saab (3) kuju

$$\begin{cases} s_{naine}(jalgpall) = 1/3 \\ s_{naine}(teater) = 2/3 \end{cases}$$

Selles tasakaalusolekus liitsündmuste tõenäosused: P(naine 2 *,mees 1)=* $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ *ja P(mees 2, naine 1)=* $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$
Lahutades 1-st vastava summa, saadakse, et $P($*mõlemad 0*$) = \frac{5}{9}$

Järeldus 0.1.2. ***Seega reaalses elus on tõnäoliselt suuremal arvul juhtudest mõlemad mängijad rahulolematud.***

0.1.4 Segastrateegiate kasude keskväärtuste maatriks:

Naine \ *Mees*	*Teater*	*Jalgpall*
Teater	*2/3*	*2/3*
Jalgpall	*2/3*	*2/3*

Võrrelda puhaste strateegiate maatriksiga! Näeme, et kasu keskväärtus ei sõltu kummagi mängija korral teise strateegiast. Näeme, et ***puhta strateegia Nashi tasakaalupunktidele vastavad (domineerivad) strateegiad Pareto-domineerivad segastrateegiaid, sest nende korral on kasud rangelt suuremad kui segastrateegiate kasude keskväärtused!***
Sellise simplistliku mudeli korral, kus vastasmängija saab kasu teise mängija eelistustega kaasaminemise korral, on parim lahendus mängijatele alati teineteisega nõustuda. Kuidas seletada, et vastaspoole kasu oli mitte enda eelistuse täitumisel 1, mitte 0? Ehk seisneb selle mängija kasu teisele mängijale heameele valmistamises.

Järeldus 0.1.3. *Puhta-strateegia mudel on küll tore, kuid otsuste tegemise stohhastilise iseloomuga fundamentaalselt vastuolus. Mängijad peavad rahule jääma sellega, et taolise mudeli segastrateegiate kasude keskväärtused on niigi kõrged. Reaalses elus on tõnäoliselt suuremal arvul juhtudest mõlemad mängijad rahulolematud. Kui suhe on mittetoimiv, siis oleks mõistlikum otsida partneriks sarnaste huvidega inimene, et strateegilisi tulemusi pikas plaanis parandada. See on pikas plaanis vajalik, sest mänguvoorude suure arvu korral pinged kuhjuvad üha enam. Kokkuvte: Suhtugem positiivselt! Ent jgem samas realistideks - naiivne on matemaatika ees silma kinni pigistada, seetttu tasub tihti tunnete asemel lheneda ratsionaalselt.*

If we can't live together, we're going to die alone. But one's happiness doesn't always lie in companionship.